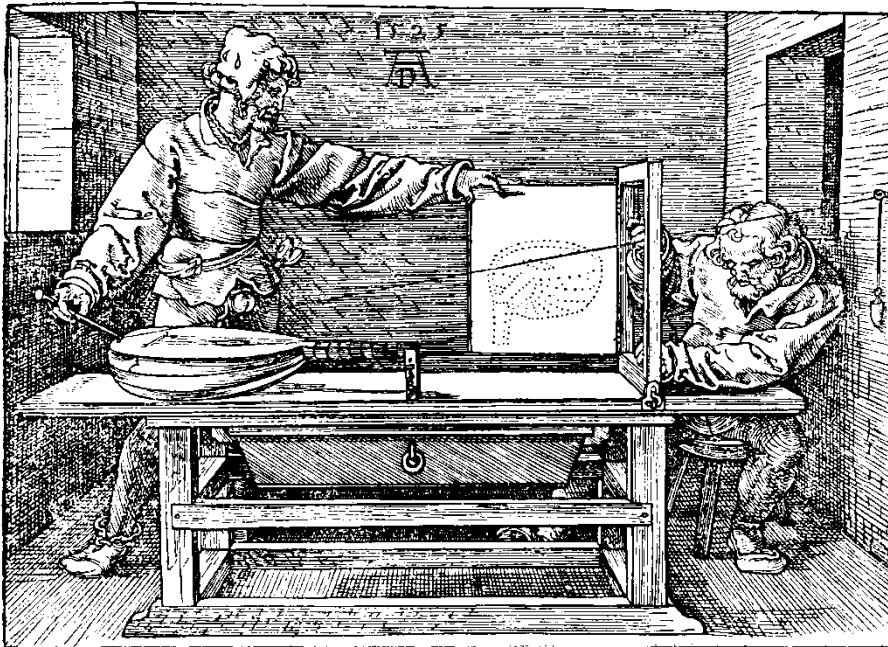


In bunten Bildern wenig Klarheit,
Viel Irrtum und ein Fünkchen Wahrheit,
So wird der beste Trank gebraut,
Der alle Welt erquickt und aufbaut. (Johann Wolfgang v. Goethe)



LV 522.242
WS 2022/23 2 VO

Bildmessung



Albrecht Dürer (1525)

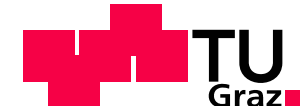
Viktor Kaufmann
Institut für Geodäsie
Technische Universität Graz
Steyrergasse 30, A-8010 Graz

Tel.: +43 316 873-6336
Fax: +43 316 873-6337
e-mail: viktor.kaufmann@tugraz.at
<http://www.staff.tugraz.at/viktor.kaufmann/>



Bildmessung

Inhaltsverzeichnis



1. Mathematische Grundlagen

- 1.1 Koordinatensysteme
- 1.2 Grundgleichungen der Photogrammetrie
- 1.3 Parametrisierung der Drehmatrix
- 1.4 Differentielle Drehungen
- 1.5 Differentialbeziehungen für den Allgemeinfall
- 1.6 Differentialbeziehungen für den genäherten Normalfall

2. Einzelbildorientierung

- 2.1 Einleitung
- 2.2 Räumlicher Rückwärtsschnitt
 - 2.2.1 Rückwärtsschnitt bei bekannter innerer Orientierung
 - 2.2.2 Rückwärtsschnitt bei unbekannter innerer Orientierung
- 2.3 Strahlenbündelmethode
 - 2.3.1 Mathematische Grundlagen
 - 2.3.2 Berechnung von Näherungswerten
 - 2.3.3 Der kritische Ort
- 2.4 Direkte Lineare Transformation (DLT)

3. Zweibildorientierung

- 3.1 Einleitung
- 3.2 Komplanaritätsbedingung
- 3.3 Kernlinien, Kernpunkte, Kernebene
- 3.4 Berechnung von Normalfallbildern (normalized images)
- 3.5 Iterative Lösung – Folgebildanschluss
- 3.6 Iterative Lösung – Bild Drehungen
- 3.7 Parallaxengleichung für den Normalfall
- 3.8 Spezielle Verfahren des CV
- 3.9 RANSAC (Random Sample Consensus) Algorithmus
- 3.10 Gefährliche Konfiguration der relativen Orientierung
- 3.11 Räumlicher Vorwärtsschnitt (Rekonstruktion)
- 3.12 Genauigkeitsanalyse

- 3.13 Modelldeformation
- 3.14 Innere und äußere Zuverlässigkeit
- 3.15 Erkennen von Ausreißern (Datenfehlern)
- 3.16 Absolute Orientierung

4. Dreibildorientierung

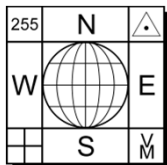
- 4.1 Einleitung
- 4.2 Parameteranzahl
- 4.3 Trifokaler Tensor
- 4.4 Berechnung des trifokalen Tensors

5. Vierbildorientierung

- 5.1 Quadrifokaler Tensor

6. Mehrbildorientierung

- 6.1 Einleitung
- 6.2 Mathematisches Basismodell
- 6.3 Zusätzliche Parameter
 - 6.3.1 The combined physical model
 - 6.3.2 Empirical AP models
 - 6.3.3 Korrelationstest, Signifikanztest, Innere Bestimmtheit
- 6.4 GPS-gestützte Aerotriangulation
- 6.5 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen
 - 6.5.1 Lösung der Normalgleichung
 - 6.5.2 Profilspeichertechnik
 - 6.5.3 Profilloptimierung
- 6.6 Datumsfestlegung
 - 6.6.1 Rang- und Datumsdefekt
 - 6.6.2 Konfigurationsdefekt
 - 6.6.3 Harte und weiche Lagerung
 - 6.6.4 Zwangsfreie Einpassung mit (fingierten) Passpunkten
 - 6.6.5 Freie Netzausgleichung



- 6.7 Bestimmung von Näherungswerten
- 6.8 Genauigkeitsbetrachtungen
 - 6.8.1 Genauigkeit der Bildkoordinaten
 - 6.8.2 Genauigkeit der Objektkoordinaten
 - 6.8.3 Genauigkeit der Simultankalibrierung
- 6.9 Projective reconstruction – bundle adjustment

7. Direkte Georeferenzierung

- 7.1 Einleitung
- 7.2 Grundprinzip
- 7.3 Erreichbare Genauigkeit und Anwendungsbeispiel
- 7.4 Einfluss des Koordinatensystems (Gauß-Krüger)
- 7.5 Anwendung in der terrestrischen Photogrammetrie

8. Bildzuordnungsverfahren

- 8.1 Einleitung
- 8.2 Flächenbasierte Verfahren (area-based matching)
 - 8.2.1 Normierte Kreuzkorrelation
 - 8.2.2 Nicht-parametrische Ähnlichkeitsmaße
 - 8.2.3 Optical flow estimation
 - 8.2.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung
- 8.3 Merkmalsbasierte Bildzuordnung
 - 8.3.1 Einleitung
 - 8.3.2 Interest-Operatoren
 - 8.3.2.1 Moravec-Operator
 - 8.3.2.2 Dreschler-Operator
 - 8.3.2.3 Förstner-Operator
 - 8.3.2.4 Harris-Operator
 - 8.3.2.5 Weitere Operatoren
 - 8.3.3 Kantenextraktion
 - 8.3.4 Flächenextraktion
 - 8.3.5 Korrespondenzanalyse
- 8.4 Hierarchical Image Matching
- 8.5 Bildzuordnung mit geometrischen Zwängen

- 8.5.1 Bildzuordnung im Bildpaar
- 8.5.2 Bildzuordnung im Bildtripel
- 8.5.3 Multi-image geometrically constraint matching
- 8.5.4 Objektgestützte Mehrbildzuordnung
- 8.6 Dense stereo matching: Semi-Global Matching (SGM)

9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

- 9.1 Einleitung
- 9.2 Kreisförmige Zielmarken
 - 9.2.1 Retro-reflektierende Zielmarken
 - 9.2.2 Sonstige Zielmarken
 - 9.2.3 Markendurchmesser und Exzentrizität des Mittelpunktes
- 9.3 Linienhafte Zielmarken
- 9.4 Marken mit codierter Punktnummer
- 9.5 Exzentrische Signalisierung

10. Messung punktförmiger und kreuzförmiger Merkmale

- 10.1.1 Segmentierung
- 10.1.2 Schwerpunktverfahren
- 10.1.3 Korrelationsverfahren
- 10.1.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung
- 10.1.5 Stern-Operator
- 10.2.6 Zhou-Operator
- 10.2 Messung kreuzförmiger Muster (Ring-Operator)
- 10.3 Genauigkeitsbetrachtungen

11. Kamerakalibrierung

- 11.1 Einleitung
- 11.2 Laborkalibrierung
- 11.3 Testfeldkalibrierung
- 11.4 Simultankalibrierung
- 11.5 Kalibrierung mit ebenem Passpunktfeld
- 11.6 Kalibrierung mit räumlichen Passpunktfeld
- 11.7 Radial-symmetrische Verzeichnung



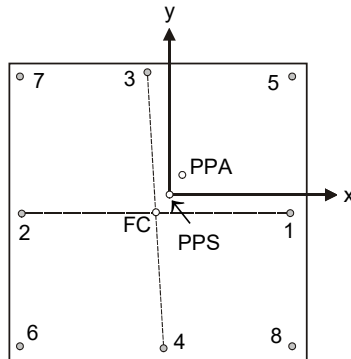
1. Mathematische Grundlagen

1.1 Koordinatensysteme

Bildkoordinatensystem: ebenes, kartesisches, rechtsdrehendes System

(ξ, η) ... affine Koordinaten (\rightarrow allgemeiner Ansatz in der Computer Vision)

(x, y) ... orthogonale kartesische Koordinaten (\rightarrow in der Photogrammetrie bevorzugt)



In der Photogrammetrie werden (ξ, η) oft als Maschinenkoordinaten bezeichnet.



Ein **Messbild** wird über die exakte Zentralprojektion definiert (Definition Prof. K. Kraus).

1-8 ... Rahmenmarken (*fiducial marks*)

PPS ... Symmetriehauptpunkt (*principal point of [best] symmetry*)

Dieser Punkt wird bei der Kalibrierung so gewählt, dass die Verzeichnungskurve möglichst radialsymmetrisch ist.

PPA ... Autokollimationshauptpunkt (*principle point of autocollimation*)

Bestimmung durch Autokollimation (vgl. Abbildung auf der nächste Seite); die resultierende Verzeichnung ist nicht notwendigerweise radialsymmetrisch.

FC ... Schnittpunkt der Rahmenmarkenverbindungslien (*fiducial center*)

Anmerkungen:

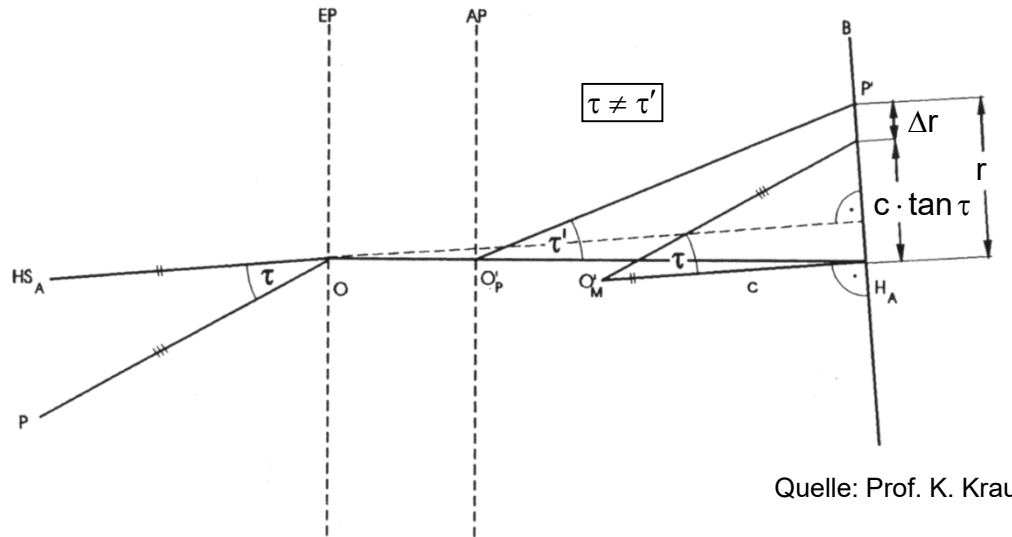
- Es wird generell dringend empfohlen, vorab keine Korrekturen für die Erdkrümmung, Refraktion oder Verzeichnung an den Bildkoordinaten anzubringen. Die Korrekturen werden – falls erforderlich – im Bündelausgleichsprogramm durchgeführt.
- Für höchste Genauigkeitsansprüche sind eventuelle Unterschiede zwischen PPS und PPA zu beachten.
- In den meisten Bündelausgleichsprogrammen wie z.B. BINGO ist der PPS als Nullpunkt des Bildkoordinatensystems definiert.
 - \Rightarrow Die Rahmenmarkensollkoordinaten aller Kameras sind so umzurechnen, dass der PPS die Koordinaten (0,0) erhält.
 - Bei neueren Kalibrierungen ist der PPS bei den meisten Kameras bereits als Bezugspunkt gewählt.
 - \Rightarrow Messprogramme, die Bildkoordinaten ausgeben, sollen weder eine eventuell vorhandene Verzeichnung korrigieren noch die Koordinaten auf den Hauptpunkt PPS/PPA umrechnen.



1. Mathematische Grundlagen

1.1 Koordinatensysteme

Innere Orientierung einer Messkamera



Quelle: Prof. K. Kraus

Die Kalibrierung einer Messkamera erfolgt – in vielen Fällen – im Labor mit Hilfe eines optischen Goniometers.

Weitere Möglichkeiten der Kalibrierung siehe Kap. 7 (Kamerakalibrierung)

- (1) Bezugsachse der Photogrammetrie ist nicht die optische Achse, sondern ein kalibrierter (= geeichter) Hauptstrahl HS_A , der objektseitig auf der Bildebene senkrecht steht und durch die Mitte der Eintrittspupille geht. Seine physikalische Verlängerung durchstößt die Bildebene im Autokollimationshauptpunkt H_A (= PPA = H).
- (2) Die Winkel τ werden in der Mitte der Eintrittspupille EP definiert und nicht in den Knotenpunkten. Da die EP meist nicht in der Hauptebene H_1 liegt, folgt $\tau \neq \tau'$!
- (3) Die durch den Bildanlegerahmen mechanisch realisierte Bildweite B weicht von der optischen Bildweite, in der die beste Schärfe eintritt, um einen kleinen Betrag ab.
- (4) Die Bildebene steht nicht in aller Strenge senkrecht auf der optischen Achse.

Wir definieren ein mathematisches Projektionszentrum O'_M derart, dass es im Abstand c, der Kamerakonstanten (= Kammerkonstanten), senkrecht vor dem Autokollimationshauptpunkt H_A liegt und die Winkel τ auch bildseitig möglichst gut realisiert. Restfehler führen zur optischen Verzeichnung Δr .

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$r = c \cdot \tan \tau + \Delta r$$

Gleichung der inneren Orientierung



1. Mathematische Grundlagen

1.1 Koordinatensysteme



Bildfehler beschreibende Funktionen:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= x - x_0 \\ y^0 &= y - y_0 \end{aligned} \right\} \dots \text{auf den Hauptpunkt bezogene Koordinaten}$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \dots \text{Bildradius, Abstand zum Bildhauptpunkt}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x^0 - \Delta x \\ \bar{y} &= y^0 - \Delta y \end{aligned} \right\} \dots \text{korrigierte Bildkoordinaten}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \underbrace{\Delta x_{\text{rad}}}_{\text{1}} + \underbrace{\Delta x_{\text{tan}}}_{\text{2}} + \underbrace{\Delta x_{\text{u}}}_{\text{3}} + \underbrace{\Delta x_{\text{aff}}}_{\text{4}} \\ \Delta y &= \underbrace{\Delta y_{\text{rad}}}_{\text{1}} + \underbrace{\Delta y_{\text{tan}}}_{\text{2}} + \underbrace{\Delta y_{\text{u}}}_{\text{3}} + \underbrace{\Delta y_{\text{aff}}}_{\text{4}} \end{aligned} \right\} \dots \text{Bildfehler}$$

ad 1 Radial-symmetrische Verzeichnung (*symmetric lens distortion*)

$$\Delta r_{\text{rad}} = K_1 \cdot r^3 + K_2 \cdot r^5 + K_3 \cdot r^7 + \dots$$

$$\Delta x_{\text{rad}} = \bar{x} \cdot \frac{\Delta r_{\text{rad}}}{r} \quad \Delta y_{\text{rad}} = \bar{y} \cdot \frac{\Delta r_{\text{rad}}}{r}$$

ad 2 Radial-asymmetrische und tangentielle Verzeichnung (*tangential lens distortion*)

$$\Delta x_{\text{tan}} = P_1 \cdot (r^2 + 2\bar{x}^2) + 2P_2 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\Delta y_{\text{tan}} = P_2 \cdot (r^2 + 2\bar{y}^2) + 2P_1 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

ad 3 Filmunebenheit (*out-of-plane distortion*)

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_{\text{u}} \\ \Delta y_{\text{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{x}/r \\ \bar{y}/r \end{Bmatrix} \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} \cdot \bar{x}^{(i-j)} \bar{y}^j$$

ad 4 Affinität und Scherung (*in-plane-distortion*)

$$\Delta x_{\text{aff}} = a \cdot \bar{x} + b \cdot \bar{y}$$

$$\Delta y_{\text{aff}} = 0$$

$$a \approx 0, b \approx 0$$

a ... Maßstabsunterschied

b ... Scherung

Parameter der inneren Orientierung (*interior orientation*):

Bildhauptpunkt (PPA, H): (x_0, y_0)

Kamerakonstante: c

Parameter von Bildfehler beschreibenden Funktionen

In der Computer Vision werden diese Parameter oft als *intrinsic parameters* bezeichnet.

Weitere Parametrisierungen nach *Brown, Jacobsen* und *Kruck*.

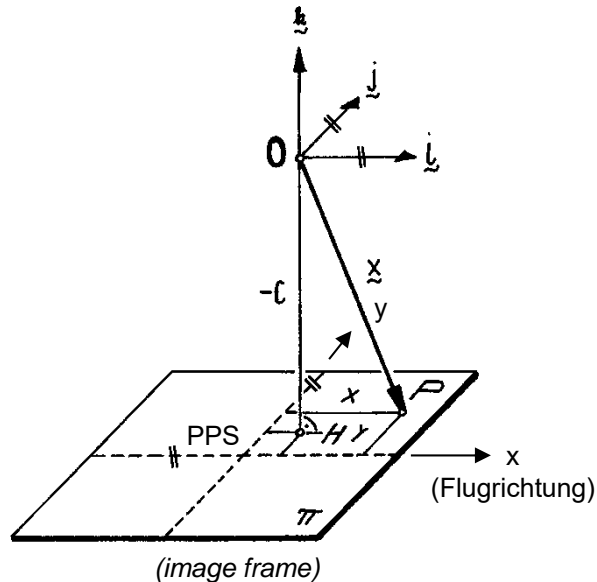
Im Rahmen einer Bündeltriangulation müssen die einzelnen Parameter auf Signifikanz getestet und gegebenenfalls eliminiert werden.



1. Mathematische Grundlagen

1.1 Koordinatensysteme

Örtliches Koordinatensystem der Aufnahme: räumliches, kartesisches, rechtsdrehendes System (framelet coordinate system)



Festgelegt durch die innere Orientierung der Aufnahme in Diapositivstellung.

Ursprung O: bildseitiges Projektionszentrum
 H = PPA ... Orthogonalprojektion von O auf π

Kamerakonstante (*principal distance, calibrated focal length*)

$$c = \overline{OH}$$

$$\text{Bild-/Bündelvektor: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x - x_0 - \Delta x \\ y - y_0 - \Delta y \\ -c \end{pmatrix}$$

Im Bereich des Computer Vision werden die Parameter der inneren Orientierung mit einer Kalibriermatrix \mathbf{K} ausgedrückt, die über 5 Freiheitsgrade verfügt (Kamerakonstante c , Hauptpunktlage x_0, y_0 , Scherung c_s und Maßstabsunterschied m der Achsen).

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} c & c_s & x_0 \\ 0 & (1+m)c & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

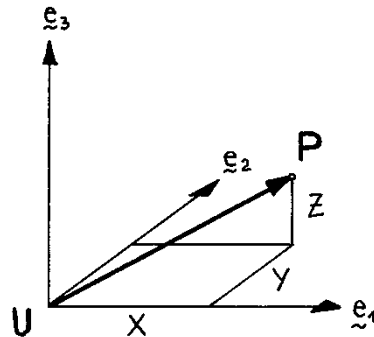
\mathbf{K} ist Teil einer allgemeinen 3×4 -Projektionsmatrix \mathbf{P} zur Transformation vom Objektraum- in den Bildraum mit Hilfe homogener Koordinaten. Objektivverzerrung kann damit nicht direkt ausgedrückt werden und muss durch eine ortsabhängige Korrektur $d\mathbf{K}(x,y)$ modelliert werden.



1. Mathematische Grundlagen

1.1 Koordinatensysteme

Objektkoordinatensystem: räumliches, kartesisches, rechtsdrehendes System



- ▶ Modellkoordinatensystem
- ▶ Objektkoordinatensystem
(LSR coordinate system – Local Space Rectangular coordinate system)
- ▶ Tangentialkoordinatensystem
- ▶ Geozentrisches Koordinatensystem
(USR coordinate system – Universal Space Rectangular coordinate system)

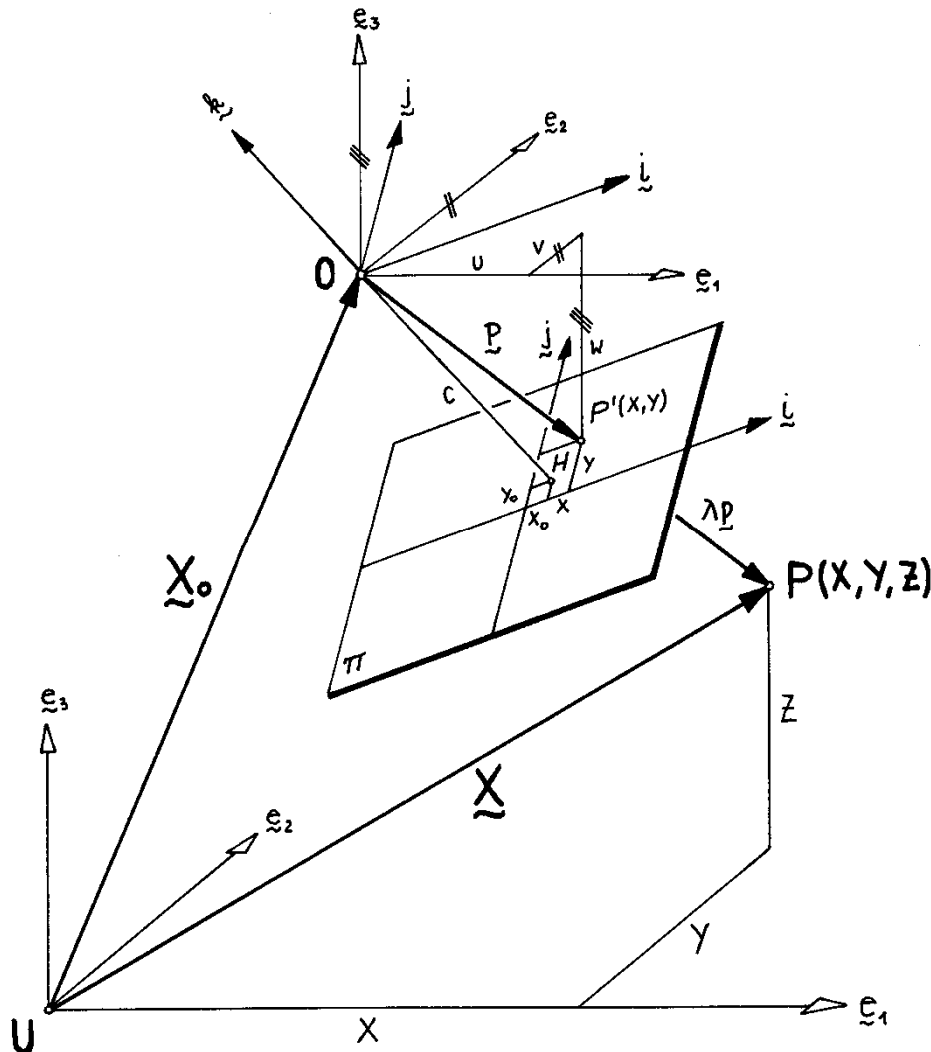
In der Photogrammetrie verwendet man ein dreidimensionales kartesisches Objektkoordinatensystem. In diesem Koordinatensystem erfolgt die Festlegung der Objektpunkte durch orthogonale Projektion auf die jeweilige Koordinatenebene. Die Ergebnisse der Photogrammetrie sind eine solche orthogonale Projektion auf die XYZ-Koordinatenebene.

Die Festpunkte der Landesvermessung (Gauss-Krüger-Abbildung) sind aber in einem verzerrten X_L, Y_L, Z_L -System gegeben. Das photogrammetrische Objektkoordinatensystem und das Landessystem sind unvereinbar. Lösungsmöglichkeiten (strenge Lösung bzw. Näherungslösungen durch Korrektur der Landeskoordinaten bzw. durch Korrektur der Bildkoordinaten) siehe Lehrbuch (Photogrammetrie, Band 2) Prof. K. Kraus.



1. Mathematische Grundlagen

1.2 Grundgleichungen der Photogrammetrie



Strahlenbündel

$$\underline{p} = \underline{R} \underline{x}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ i_2 & j_2 & k_2 \\ i_3 & j_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{pmatrix}$$

\underline{x} ... Bündelvektor (nicht orientiert)
 \underline{R} ... Rotationsmatrix
 \underline{p} ... Bündelvektor (orientiert)

Kollinearitätsgleichungen

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \lambda \underline{R} \underline{x}$$

$$(\underline{X} - \underline{X}_0) = \lambda \underline{R} \underline{x}$$

\underline{X}_0 ... Projektionszentrum
 λ ... ortsabhängiger Streckungsfaktor

Grundgleichungen der Photogrammetrie

$$\lambda \underline{x} = \underline{R}^T (\underline{X} - \underline{X}_0)$$

$$\underline{x} = \frac{1}{\lambda} \underline{R}^T (\underline{X} - \underline{X}_0)$$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 - \Delta x \\ y - y_0 - \Delta y \\ -c \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

erweitertes Modell

Abbildungsgleichungen der Photogrammetrie (Kollinearitätsgleichungen)

$$x = x_0 - c \frac{i_1(X - X_0) + i_2(Y - Y_0) + i_3(Z - Z_0)}{k_1(X - X_0) + k_2(Y - Y_0) + k_3(Z - Z_0)} + \Delta x$$

$$y = y_0 - c \frac{j_1(X - X_0) + j_2(Y - Y_0) + j_3(Z - Z_0)}{k_1(X - X_0) + k_2(Y - Y_0) + k_3(Z - Z_0)} + \Delta y$$

x, y ... Bildkoordinaten



1. Mathematische Grundlagen

1.2 Grundgleichungen der Photogrammetrie



Rekonstruktionsgleichungen

$$X = (Z - Z_0) \cdot \frac{i_1(x - x_0 - \Delta x) + j_1(y - y_0 - \Delta y) - k_1 c}{i_3(x - x_0 - \Delta x) + j_3(y - y_0 - \Delta y) - k_3 c}$$
$$Y = (Z - Z_0) \cdot \frac{i_2(x - x_0 - \Delta x) + j_2(y - y_0 - \Delta y) - k_2 c}{i_3(x - x_0 - \Delta x) + j_3(y - y_0 - \Delta y) - k_3 c}$$

innere Orientierung (*interior orientation*) ... $c, x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$... (*intrinsic parameters*)

äußere Orientierung (*exterior orientation*) ... $\mathbf{X}_0, \mathbf{R}_0$... (*extrinsic parameters*)

Bildkoordinaten ... x, y

Objektkoordinaten ... X, Y, Z

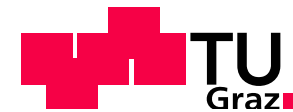
Diskussion:

- Die Kollinearitätsgleichungen beschreiben somit geometrisch den Vorgang einer zentralprojektiven Bildentstehung in einer Kamera.
- Jeder Objektpunkt wird in nur einen Bildpunkt abgebildet.
- Zu jedem Bildpunkt gibt es unendlich viele kollineare Objektpunkte.
- Die Bedeutung der Grundgleichung der Photogrammetrie rührt auch daher, dass die auf der linken Seite stehenden Bildkoordinaten (beobachtete Messgrößen) als Funktion der auf der rechten Seite stehenden Unbekannten formuliert werden. Sie eignen sich daher unmittelbar als Beobachtungsgleichungen für eine überbestimmte Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (z.B. räumlicher Vorwärtsschnitt, räumlicher Rückwärtsschnitt, Bündeltriangulation).



1. Mathematische Grundlagen

1.3 Parametrisierung der Drehmatrix



1.3.1 Drehmatrix mit algebraischen Funktionen (Quaternione)

a, b, c, d ... vier algebraische Parameter

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = (d \cdot E - S)^{-1} \cdot (d \cdot E + S)$$

$$R_Q = \begin{pmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(ab - cd) & 2(ac + bd) \\ 2(ab + cd) & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc - ad) \\ 2(ac - bd) & 2(bc - ad) & d^2 - a^2 - b^2 - c^2 \end{pmatrix} \frac{1}{d^2 + a^2 + b^2 + c^2} \quad \dots \text{ orthogonale Drehmatrix}$$

$$q = \left(\underbrace{d}_{\text{Skalar}}, \underbrace{a \ b \ c}_{\text{Vektor}} \right)$$

Quaternione bilden eine Algebra.

Quadratische Norm: $\|q\|^2 = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$

Für $\|q\|^2 = 1$ erhält man

$$R_{\bar{q}} = \begin{pmatrix} 1 - 2(b^2 + c^2) & 2(ab - dc) & 2(ac + db) \\ 2(ba + dc) & 1 - 2(a^2 + c^2) & 2(bc - da) \\ 2(ca - db) & 2(cb + da) & 1 - 2(a^2 + b^2) \end{pmatrix} \quad \dots \text{ orthonormale Drehmatrix}$$

Vorteile:

- keine Verwendung trigonometrischer Funktionen
- vereinfachte Aufstellung der Koeffizientenmatrix und schnelleres Konvergenzverhalten in Ausgleichssystemen
- keine singulären Stellen
- schnellere Berechnung, da keine Potenzreihen für die trigonometrischen Funktionen zugrunde liegen

In der Luftbildphotogrammetrie wird oft die Parametrisierung nach Rodriquez (1840) verwendet.

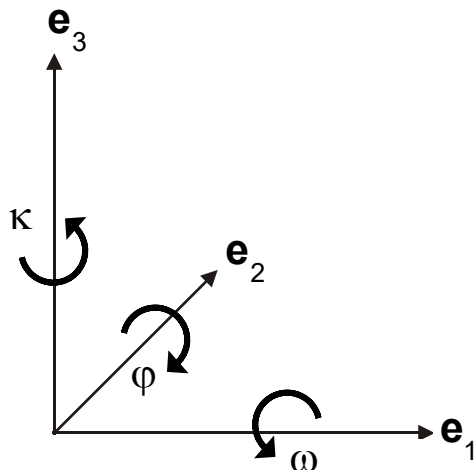
Mathematische Grundlagen: <http://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion>



1. Mathematische Grundlagen

1.3 Parametrisierung der Drehmatrix

1.3.2 Analytische Darstellung durch 3 unabhängige Drehwinkel



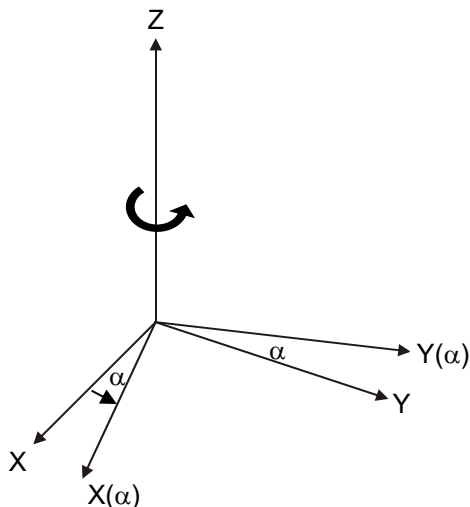
In der Photogrammetrie wird die kardanische Form bevorzugt.
Drehung um ausgewählte Achsen: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Eigenschaften einer Drehmatrix

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E}, \det(\mathbf{R}) = 1$$

orthonormierte Basis

Definition der Drehrichtungen:



Drehung erfolgt gegen den Uhrzeigersinn bei Blick aus der positiven Richtung der Drehachsen.

Die Gesamtdrehung \mathbf{R} einer räumlichen Koordinatentransformation setzt sich aus den hintereinander ausgeführten Einzeldrehungen zusammen, wobei die Reihenfolge der Drehungen nicht beliebig ist.

Primärdrehung um \mathbf{e}_1 : ω (= Querneigung)

Sekundärdrehung um \mathbf{e}_2 : φ (= Längsneigung)

Tertiärdrehung um \mathbf{e}_3 : κ (= Verkantung)

Wir wollen die Drehung um mitgedrehte Achsen definieren.



1. Mathematische Grundlagen

1.3 Parametrisierung der Drehmatrix

cont.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\varphi \mathbf{R}_\kappa \quad [\mathbf{e}_1(\omega) \rightarrow \mathbf{e}'_2(\varphi) \rightarrow \mathbf{e}''_3(\kappa)]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & -\cos \varphi \sin \kappa & \sin \varphi \\ \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa + \cos \omega \sin \kappa & -\sin \omega \sin \varphi \sin \kappa + \cos \omega \cos \kappa & -\sin \omega \cos \varphi \\ -\cos \omega \sin \varphi \cos \kappa + \sin \omega \sin \kappa & \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa + \sin \omega \cos \kappa & \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ i_2 & j_2 & k_2 \\ i_3 & j_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_\varphi \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\kappa \quad [\mathbf{e}_2(\varphi) \rightarrow \mathbf{e}'_1(\omega) \rightarrow \mathbf{e}''_3(\kappa)]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa + \sin \varphi \sin \omega \sin \kappa & -\cos \varphi \sin \kappa + \sin \varphi \sin \omega \cos \kappa & \sin \varphi \cos \omega \\ \cos \omega \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa & -\sin \omega \\ -\sin \varphi \cos \kappa + \cos \varphi \sin \omega \sin \kappa & \sin \varphi \sin \kappa + \cos \varphi \sin \omega \cos \kappa & \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \bar{i}_2 & \bar{j}_2 & \bar{k}_2 \\ \bar{i}_3 & \bar{j}_3 & \bar{k}_3 \end{pmatrix}$$

Umrechnung:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{R} \rightarrow \bar{\mathbf{R}} & \bar{\varphi} = a \tan 2(k_1, k_3) \\ & h = \sqrt{k_1^2 + k_3^2} \\ & \bar{\omega} = a \tan 2(-k_2, h) \\ & \bar{\kappa} = a \tan 2(i_2, j_2) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \bar{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R} & \omega = a \tan 2(-\bar{k}_2, \bar{k}_3) \\ & \bar{h} = \sqrt{\bar{k}_2^2 + \bar{k}_3^2} \\ & \varphi = a \tan 2(\bar{k}_1, \bar{h}) \\ & \kappa = a \tan 2(-\bar{j}_1, \bar{i}_1) \end{array}$$

Anmerkung: Die Berechnung der Drehwinkel ist nur dann möglich, wenn mindestens ein Element der $a \tan 2(\)$ ungleich Null ist. Sind beide Elemente Null, dann ist eine Berechnung nicht möglich.

Vgl. z.B. $\mathbf{R}_\omega(180^\circ) = \mathbf{R}_\varphi(180^\circ) \mathbf{R}_\kappa(180^\circ)$.

Spezielle Auswahl der Drehwinkel bei Nahbereichsanwendungen.



1. Mathematische Grundlagen

1.3 Parametrisierung der Drehmatrix



1.3.3 Geometrische Form (mit Drehachse und Drehwinkel)

$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)^T$ $|\mathbf{d}| = 1$ normierter Drehvektor (= Drehachse)

α ... Drehwinkel

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} \cos \alpha + \mathbf{D}(1 - \cos \alpha) + \mathbf{A} \sin \alpha$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \mathbf{E} \cos \alpha + \mathbf{D}(1 - \cos \alpha) - \mathbf{A} \sin \alpha$$

$\mathbf{E} = \dots$ Einheitstensor

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 d_1 & d_2 d_1 & d_3 d_1 \\ d_1 d_2 & d_2 d_2 & d_3 d_2 \\ d_1 d_3 & d_2 d_3 & d_3 d_3 \end{pmatrix} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}^T \dots \text{Projektionstensor} \leftarrow \text{dyadisches Produkt}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix} \dots \text{schiefssymmetrischer Axiator}$$

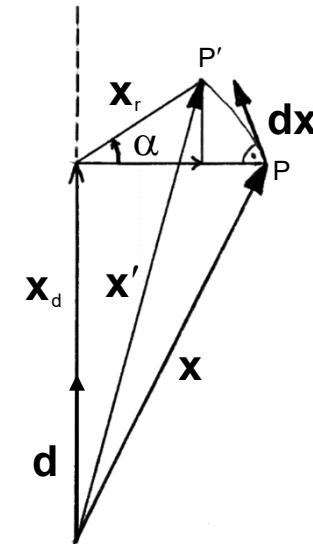
$$\mathbf{D}\mathbf{D} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$$



\mathbf{P}_d ... Projektionsmatrix (-tensor)

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{d}\mathbf{d}^T \dots \text{vgl. } \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{I}$$

$$\mathbf{x}' = \overbrace{\mathbf{P}_d \mathbf{x}}^{\mathbf{x}_d} + \cos \alpha (\mathbf{E} - \mathbf{P}_d) \mathbf{x} + \sin \alpha \overbrace{(\mathbf{E} - \mathbf{P}_d) \times \mathbf{x}}^{\mathbf{d} \times \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}_d \mathbf{x} + \cos \alpha (\mathbf{E} - \mathbf{P}_d) \mathbf{x} + \sin \alpha \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{P}_d + \mathbf{E} \cos \alpha - \mathbf{P}_d \cos \alpha + \mathbf{A} \sin \alpha) \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}$$



1. Mathematische Grundlagen

1.4 Differentielle Drehungen

Ableitung eines Vektors \mathbf{x} nach einer Drehgröße ist gleich dem Produkt des zur Drehachse gehörigen Axiators mit dem Vektor, oder gleich dem äußeren Produkt des Vektors der Drehachse mit dem Vektor \mathbf{x} .

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\alpha} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$$

$$d\mathbf{a} = d\alpha \mathbf{a} = (d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3)^T \quad |\mathbf{a}| = 1$$

$d\mathbf{a}$... Drehvektor besitzt die Richtung der Drehachse und dessen Länge ist gleich dem Drehbetrag.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{a} \times \mathbf{x} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$$

$$d\mathbf{A} = d\alpha \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -d\alpha_3 & d\alpha_2 \\ d\alpha_3 & 0 & -d\alpha_1 \\ -d\alpha_2 & d\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{E} + d\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{R} = d\mathbf{R} \cdot (\mathbf{R}) = (\mathbf{R}) + d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{R}) \quad d\mathbf{A} \dots \text{Differentialaxiator}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 d\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{E} + d\mathbf{A}_1)(\mathbf{E} + d\mathbf{A}_2)(\mathbf{E} + d\mathbf{A}_3) \mathbf{x} && \text{mitgedrehte Achsen} \\ &= \mathbf{x} + (d\mathbf{A}_1 + d\mathbf{A}_2 + d\mathbf{A}_3) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} + (d\mathbf{a}_1 + d\mathbf{a}_2 + d\mathbf{a}_3) \times \mathbf{x} && \text{Drehreihenfolge ist egal!} \end{aligned}$$

Drehvektor und Matrix der resultierenden Drehung sind gleich der Summe der entsprechenden Elemente der Drehung.

Differentielle Drehungen sind kommutativ; ihre Reihenfolge kann beliebig vertauscht werden.

$$\text{Luftbildaufnahme: } d\mathbf{a} = \begin{pmatrix} d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \end{pmatrix} \Rightarrow d\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -d\kappa & d\varphi \\ d\kappa & 0 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\alpha_3 & d\alpha_2 \\ d\alpha_3 & 0 & -d\alpha_1 \\ -d\alpha_2 & d\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

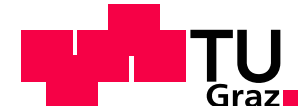
Die Ableitung differentieller Formeln ist mit differentiellen Drehmatrizen wesentlich leichter bzw. auch allgemeiner, weil die Reihenfolge der Einzeldrehungen belanglos ist.

Vgl. totales Differential durch Anwenden der Kettenregel.



1. Mathematische Grundlagen

1.5 Differentialbeziehungen für den Allgemeinfall



Differentiale der Kollinearitätsbeziehung (Prof. K. Rinner)

$$x = x_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} \quad y = y_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{j}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ i_2 & j_2 & k_2 \\ i_3 & j_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

$$dx = dx_0 - dc \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} + c \frac{d\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{[(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}]^2} d\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{k} - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot d\mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} + c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{[(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}]^2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot d\mathbf{k}$$

$$\bar{\mathbf{R}} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{E} + d\mathbf{A}) \cdot \mathbf{R}$$

$$dy = dy_0 - dc \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{j}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} + c \frac{d\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{j}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{j}}{[(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}]^2} d\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{k} - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot d\mathbf{j}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} + c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{j}}{[(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}]^2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot d\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -d\alpha_3 & d\alpha_2 \\ d\alpha_3 & 0 & -d\alpha_1 \\ -d\alpha_2 & d\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d\mathbf{i} = d\mathbf{a} \times \mathbf{i} \quad d\mathbf{j} = d\mathbf{a} \times \mathbf{j} \quad d\mathbf{k} = d\mathbf{a} \times \mathbf{k}$$

$$dx = dx_0 + \frac{x - x_0}{c} dc + \mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{X}_0 + \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{a}$$

$$d\mathbf{a} = \begin{pmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$dy = dy_0 + \frac{y - y_0}{c} dc + \mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{X}_0 + \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{a}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \frac{c\mathbf{i} + (x - x_0)\mathbf{k}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \frac{c\mathbf{j} + (y - y_0)\mathbf{k}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \times \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \times \mathbf{u}_2$$

Umformung von \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{c} [(x - x_0)(y - y_0)]\mathbf{i} + c \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{c} \right] \mathbf{j} + (y - y_0)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{c} \left[1 + \frac{(y - y_0)^2}{c} \right] \mathbf{i} + \frac{1}{c} [(x - x_0)(y - y_0)]\mathbf{j} - (x - x_0)\mathbf{k}$$

Beweise für \mathbf{u}_1 und \mathbf{v}_1 siehe Vorlesung.



1. Mathematische Grundlagen

1.5 Differentialbeziehungen für den Allgemeinfall



Differentiale der Kollinearitätsbeziehung (Prof. K. Kraus)

Drehmatrix **R**: Drehung um mitgedrehte Achsen (ω ... primär, φ ... sekundär, κ ... tertiär)

$$\left. \begin{aligned}
 x &= x_0 - c \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} = x_0 - c \frac{Z_x}{N} \\
 y &= y_0 - c \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} = y_0 - c \frac{Z_y}{N}
 \end{aligned} \right\} \text{Differentialquotienten nach der Kettenregel}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ i_2 & j_2 & k_2 \\ i_3 & j_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

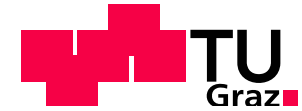
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial c} &= -\frac{Z_x}{N} & \frac{\partial y}{\partial c} &= -\frac{Z_y}{N} & \frac{\partial x}{\partial \omega} &= -\frac{c}{N} \left\{ ((Y - Y_0)r_{33} - (Z - Z_0)r_{23}) \frac{Z_x}{N} - (Y - Y_0)r_{31} + (Z - Z_0)r_{21} \right\} \\
 \frac{\partial x}{\partial X_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{13}Z_x - r_{11}N) & \frac{\partial y}{\partial X_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{13}Z_y - r_{12}N) & \frac{\partial y}{\partial \omega} &= -\frac{c}{N} \left\{ ((Y - Y_0)r_{33} - (Z - Z_0)r_{23}) \frac{Z_y}{N} - (Y - Y_0)r_{32} + (Z - Z_0)r_{22} \right\} \\
 \frac{\partial x}{\partial Y_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{23}Z_x - r_{21}N) & \frac{\partial y}{\partial Y_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{23}Z_y - r_{22}N) & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{c}{N} \left\{ (Z_x \cos \kappa - Z_y \sin \kappa) \frac{Z_x}{N} + N \cos \kappa \right\} \\
 \frac{\partial x}{\partial Z_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{33}Z_x - r_{31}N) & \frac{\partial y}{\partial Z_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{33}Z_y - r_{32}N) & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{c}{N} \left\{ (Z_x \cos \kappa - Z_y \sin \kappa) \frac{Z_y}{N} - N \sin \kappa \right\} \\
 \\
 \frac{\partial x}{\partial \kappa} &= -\frac{c}{N} Z_y & \frac{\partial y}{\partial \kappa} &= \frac{c}{N} Z_x & \\
 \frac{\partial x}{\partial X} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{11} - Z_x r_{13}) & \frac{\partial y}{\partial X} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{12} - Z_y r_{13}) & \\
 \frac{\partial x}{\partial Y} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{21} - Z_x r_{23}) & \frac{\partial y}{\partial Y} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{22} - Z_y r_{23}) & \\
 \frac{\partial x}{\partial Z} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{31} - Z_x r_{33}) & \frac{\partial y}{\partial Z} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{32} - Z_y r_{33}) &
 \end{aligned}$$

$\left(\frac{\partial X}{\partial c}\right)^0$... Taylorreihenentwicklung mit Näherungen ()



1. Mathematische Grundlagen

1.6 Differentialbeziehungen für den genäherten Normalfall



Genäherter Normalfall:

$$(\mathbf{i}) = \mathbf{e}_1, \quad (\mathbf{j}) = \mathbf{e}_2, \quad (\mathbf{k}) = \mathbf{e}_3 \Rightarrow (\mathbf{R}) = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{d}\mathbf{a} = (d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3)^T = (d\omega, d\varphi, d\kappa)^T \quad (\text{siehe Ansatz Prof. K. Rinner})$$

$$\begin{aligned} dx &= dx_0 + \frac{x-x_0}{c}dc - \frac{c}{h}dX_0 - \frac{x-x_0}{h}dZ_0 - \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{c}d\omega + c\left[1 + \frac{(x-x_0)^2}{c}\right]d\varphi + (y-y_0)d\kappa \\ dy &= dy_0 + \frac{y-y_0}{c}dc - \frac{c}{h}dY_0 - \frac{y-y_0}{h}dZ_0 - c\left[1 + \frac{(y-y_0)^2}{c}\right]d\omega + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{c}d\varphi - (x-x_0)d\kappa \end{aligned}$$

$$h = Z_0 - Z$$

Genäherte Senkrechtaufnahme:

$$(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} \cos \kappa \\ \sin \kappa \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} -\sin \kappa \\ \cos \kappa \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{d}\mathbf{a} = (d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3)^T = (d\omega, d\varphi, d\kappa)^T$$

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{1}{h} \begin{pmatrix} c \cdot \cos \kappa \\ c \cdot \sin \kappa \\ x - x_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{1}{h} \begin{pmatrix} -c \cdot \sin \kappa \\ c \cdot \cos \kappa \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{c} \begin{pmatrix} \cos \kappa \\ \sin \kappa \\ 0 \end{pmatrix} + c \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{c}\right)^2\right] \begin{pmatrix} -\sin \kappa \\ \cos \kappa \\ 0 \end{pmatrix} + (y-y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = -c \left[1 + \left(\frac{y-y_0}{c}\right)^2\right] \begin{pmatrix} \cos \kappa \\ \sin \kappa \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{c} \begin{pmatrix} -\sin \kappa \\ \cos \kappa \\ 0 \end{pmatrix} - (x-x_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1. Mathematische Grundlagen

1.6 Differentialbeziehungen für den genäherten Normalfall



cont.

Genäherte Senkrechtaufnahme:

$$\begin{aligned}
 dx &= dx_0 + \frac{x-x_0}{c}dc - \frac{c}{h}\cos\kappa \cdot dX_0 - \frac{c}{h}\sin\kappa \cdot dY_0 - \frac{x-x_0}{h}dZ_0 + \\
 &+ \left\{ -\frac{\cos\kappa}{c}(x-x_0)(y-y_0) - c \cdot \sin\kappa \left[1 + \left(\frac{(x-x_0)^2}{c} \right) \right] \right\} d\omega + \\
 &+ \left\{ -\frac{\sin\kappa}{c}(x-x_0)(y-y_0) + c \cdot \cos\kappa \left[1 + \left(\frac{(x-x_0)^2}{c} \right) \right] \right\} d\varphi + (y-y_0)d\kappa \\
 dy &= dy_0 + \frac{y-y_0}{c}dc + \frac{c}{h}\sin\kappa \cdot dX_0 - \frac{c}{h}\cos\kappa \cdot dY_0 - \frac{y-y_0}{h}dZ_0 + \\
 &+ \left\{ -c \cdot \cos\kappa \left[1 + \left(\frac{(y-y_0)^2}{c} \right) \right] - \frac{\sin\kappa}{c}(x-x_0)(y-y_0) \right\} d\omega + \\
 &+ \left\{ -c \cdot \sin\kappa \left[1 + \left(\frac{(y-y_0)^2}{c} \right) \right] + \frac{\cos\kappa}{c}(x-x_0)(y-y_0) \right\} d\varphi - (x-x_0)d\kappa
 \end{aligned}$$

$$h = Z_0 - Z$$

Anmerkung:

$$\left. \begin{aligned}
 \omega &= (\omega) + d\omega \\
 \varphi &= (\varphi) + d\varphi \\
 \kappa &= (\kappa) + d\kappa \\
 \\
 d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} &\Rightarrow \mathbf{R}_2
 \end{aligned} \right\} \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 \text{ für kleine Werte } (\omega), (\varphi) \text{ und } (\kappa)$$



2. Einzelbildorientierung

2.1 Einleitung

Unter Orientierung eines Einzelbildes wird zunächst die Ermittlung der äußeren Orientierung (\mathbf{X}_0, \mathbf{R}) durch Bildmessung verstanden. (Keine Berücksichtigung von GPS- und INS-Messdaten im Falle der Luftbildauswertung.) Die verbreiteten Rechenverfahren können in zwei Gruppen eingeteilt werden:

1. Berechnung der äußeren Orientierung auf Basis der **Kollinearitätsgleichungen:**

Funktionales Modell: *nicht-lineare* Abbildungsgleichungen;
nicht-lineare Lösung: mindestens 3 Vollpasspunkte (XYZ) im Objektraum,
Näherungswerte für die gesuchten Orientierungsunbekannten

2. Berechnung der äußeren Orientierung mit Hilfe **projektiver Beziehungen:**

Diese Verfahren zielen darauf hinaus, die gesuchten Orientierungsunbekannten durch *direkte* Lösung ohne Näherungswerte zu bestimmen.

Funktionales Modell: *(lineare) projektive* Beziehungen bzw.
Linearisierung durch Überbestimmung.

Das bekannteste Verfahren dieser Gruppe ist die **Direkte Lineare Transformation (DLT)**. Sie benötigt mindestens 6 Vollpasspunkte (X,Y,Z).

Pose computation overview: https://docs.opencv.org/4.x/d5/d1f/calib3d_solvePnP.html



2. Einzelbildorientierung

2.2 Räumlicher Rückwärtsschnitt 2.2.1 2.2.2



2.2.1 Rückwärtsschnitt bei bekannter innerer Orientierung

$\underbrace{(x_0, y_0)}_{\text{Hauptpunkt}}, \underbrace{c}_{\text{Kamerakonstante}}, \underbrace{(\Delta x, \Delta y)}_{\text{zusätzliche Parameter}} \dots \text{bekannt}$

(X_0, R) ... unbekannte äußere Orientierung (6 Unbekannte)

Zur Lösung werden die XYZ-Koordinaten von 3 Objektpunkten P_i benötigt, die nicht auf einer Geraden liegen dürfen.

Bei Verwendung von nur 3 Passpunkten existieren streng genommen mehrere Lösungen.

Daher sind aus diesem Grund und nicht nur zur Linearisierung des nicht-linearen funktionalen Modells gute Näherungswerte notwendig.

Durch Hinzunahme von weiteren bekannten Objektpunkten kann i. Allg. die richtige Lösung gefunden werden.

2.2.2 Rückwärtsschnitt bei unbekannter innerer Orientierung

Sind die Parameter der inneren Orientierung unbekannt wie z.B. bei einer Amateurkamera, dann erhöht sich die Anzahl der zu bestimmenden Parameter.

Parameter	Zahl der Unbekannten	Mindestanzahl der Passpunkte
X_0, R	6	3
c	7	4 (3.5)
x_0, y_0, c	9	5 (4.5)
K_1, K_2, K_3	12	6
etc.		

Anmerkungen: Liegen alle Passpunkte in einer Ebene, so wird das Normalgleichungssystem des Rückwärtsschnittes *singulär*. Die Zuordnung zwischen Bild- und Objektebene kann mit nur **8 Parametern** gelöst werden (\rightarrow Projektivtransformation).

$9U - 8U = 1 \Rightarrow$ Wird eine Bestimmungsgröße (z.B. die Kamerakonstante) auf einen beliebigen Wert gesetzt, kann jedoch eine eindeutige Lösung berechnet werden. (Annahme: Bildebene ist zur Objektebene geneigt.)



2. Einzelbildorientierung

2.3 Strahlenbündelmethode 2.3.1 Mathematische Grundlagen



Die Strahlenbündelmethode kann als Sonderfall der **Bündelblockausgleichung** angesehen werden ($n = 1$ Bild).

Unbekannte: innere Orientierung $(x_0, y_0, c) + \{\Delta x, \Delta y\}$
 Aufnahmeort (X_0, Y_0, Z_0)
 Drehmatrix $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Jeder Passpunkt \mathbf{X} gibt Anlass zu zwei Gleichungen der Form:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} & y &= y_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{j}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= F(X_0, Y_0, Z_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x_0, c, \{\Delta x, \Delta y\}, X, Y, Z) \\ y &= F(X_0, Y_0, Z_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, y_0, c, \{\Delta x, \Delta y\}, X, Y, Z) \end{aligned}$$

Die Unbekannten können nur nach Linearisierung mittels Näherungswerten berechnet werden.

$$dx = dx_0 + \frac{x - x_0}{c} dc + \mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{X}_0 + \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{a}$$

Ansatz (Prof. K. Rinner) mit differentieller Drehmatrix

$$dy = dy_0 + \frac{y - y_0}{c} dc + \mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{X}_0 + \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{a}$$

Ausgleichung: $x + v_x = (F)_x^0 + dF_x = (x) + dx$

$y + v_y = (F)_y^0 + dF_y = (y) + dy$

$v_x = dx + (x) - x$

$v_y = dy + (y) - y$

$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{l} \quad \dots$ Verbesserungsgleichungen

$x, y \quad \dots$ Messwerte

$(x), (y) \quad \dots$ Näherungen

$v_x, v_y \quad \dots$ Verbesserungen

Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen: $\sum \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \text{Minimum} \Rightarrow$

$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad \mathbf{A} \quad \dots$ Designmatrix

$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \quad \dots$ Normalgleichungsmatrix

$\mathbf{x} \quad \dots$ Unbekannten

Ergebnis: $dx_0, dy_0, dc, d\mathbf{X}_0, d\mathbf{a}$

$(X_0) + dX_0 = X_0$

$(x_0) + dx_0 = x_0$

$(Y_0) + dY_0 = Y_0$

$(y_0) + dy_0 = y_0$

$(Z_0) + dZ_0 = Z_0$

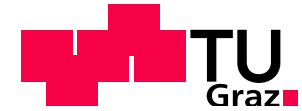
$(c) + dc = c$

$$d\mathbf{R} = \mathbf{E} + d\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -d\alpha_3 & d\alpha_2 \\ d\alpha_3 & 1 & -d\alpha_1 \\ -d\alpha_2 & d\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$



2. Einzelbildorientierung

2.3 Strahlenbündelmethode 2.3.1 Mathematische Grundlagen



Da dR i. Allg. nicht orthonormiert ist, folgt nun folgender Schritt:

$\sin \alpha = d\alpha$, $\cos \alpha = (1 - d^2\alpha)^{1/2}$ und Einsetzen in die entsprechende Drehmatrix

dR_n

$R = dR_n \cdot (R)$

Bei der genäherten Senkrechtaufnahme im Luftbildfall können die Winkeländerungen auch additiv zu den Näherungswerten angebracht werden: $\omega = (\omega) + d\alpha_1$

$$\varphi = (\varphi) + d\alpha_2$$

$$\kappa = (\kappa) + d\alpha_3$$

Der Berechnungsvorgang läuft i. Allg. iterativ ab, bis x unter einer Rechenschärfe liegen oder eine maximale Anzahl von Iterationen erreicht ist.

A -Matrix wird i. Allg. mit den neuen Näherungswerten neu berechnet.

Bei entsprechend guten Näherungswerten genügt es jedoch, lediglich die Absolutglieder I jeweils neu zu berechnen und die Koeffizienten a_{ij} unverändert in die nächste Iteration zu übernehmen.

Abschließend erfolgt eine durchgreifende Kontrolle.

Aus allen Verbesserungen v kann auch eine **Schätzung für die Standardabweichung** ermittelt werden.

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-m}} \quad \dots \text{Mittlerer Fehler einer Beobachtung mit dem Gewicht 1 (= Gewichtseinheitsfehler)}$$

Redundanz

$$\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{Q}_{xx}} \quad \dots \text{Mittlerer Fehler der einzelnen Unbekannten}$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$$

Modifikationen:

(1) Unterschiedliche Gewichtung der gemessenen Bildkoordinaten (x,y) :

$$\sigma_x = \sigma_y \Rightarrow p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_x^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sigma_0^2}{\sigma_y^2} \quad \sigma_0 \quad \dots \quad \text{a priori Gewichtseinheitsfehler}$$



2. Einzelbildorientierung

2.3 Strahlenbündelmethode 2.3.1 Mathematische Grundlagen



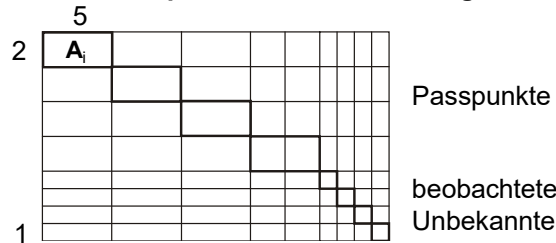
cont.

(2) XYZ-Koordinaten der Objektpunkte als Messwerte einführen:

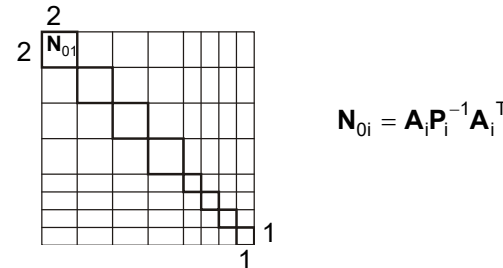
$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_x, v_y, v_z)^T \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} = 0$$

(3) Einführung von \mathbf{X}_0 , da x_0, y_0 und c als Pseudo-Beobachtungen mit einer a-priori Genauigkeit:

Die Lösung des überbestimmten Gleichungssystems nach dem Gauß'schen Minimumsprinzip führt auf einen **quasivermittelnden Ausgleich**.



Spezielle Struktur der Matrix A



Spezielle Struktur der Matrix N_0

$$\mathbf{N}_{0i} = \mathbf{A}_i \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{A}_i^T$$

Auf Grund der speziellen Datenstruktur vereinfacht sich der Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung zu einem quasivermittelnden Ausgleich, was rechentechnisch große Vorteile mit sich bringt. Da von der Matrix \mathbf{A} (bzw. \mathbf{N}_0) nur die von Null verschiedenen Werte, welche längs der Diagonale angeordnet sind, abgespeichert werden, wird erheblich Speicherplatz eingespart. Schließlich ergibt sich folgendes Normalgleichungssystem:

$$(\mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{01}^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{N}_{02}^{-1} \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_n^T \mathbf{N}_{0n}^{-1} \mathbf{B}_n) \mathbf{x} = -(\mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{01}^{-1} \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{B}_n^T \mathbf{N}_{0n}^{-1} \mathbf{w}_n)$$

Hinter dieser Gleichung versteckt sich das Additionstheorem der Ausgleichsrechnung, wonach sich die Normalgleichungen des Gesamtsystems als Summe der Normalgleichungen zu den einzelnen unkorrelierten Gruppen ergeben. Die Berechnung der Korrelaten \mathbf{k}_i und der Verbesserungen \mathbf{v}_i wird rechentechnisch sehr einfach:

$$\mathbf{k}_i = -\mathbf{N}_{0i}^{-1} (\mathbf{B}_i \mathbf{x} + \mathbf{w}_i)$$

$$\mathbf{v}_i = -\mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{k}_i$$

Das Prinzip der quasivermittelnden Ausgleichung kommt auch bei der DLT (2D: $P^2 \rightarrow P^2$ und 3D: $P^3 \rightarrow P^2$) zur Anwendung.



2. Einzelbildorientierung

2.3.2 Berechnung von Näherungswerten

► „Gemessene“ Näherungswerte:

Näherungswerte der Orientierungsgrößen können unter Umständen vor Ort gemessen werden, z.B. durch geodätische Messungen in der terrestrischen Photogrammetrie.

In der Luftbildaufnahme können durch GPS- und INS-Messungen gute Näherungswerte bereit gestellt werden.

Die Bestimmung der Lageparameter (\mathbf{X}_0) kann sehr häufig durch einfache Mittel (Abgreifen aus Plänen – vgl. AUSTRIAN MAP) vorgenommen werden. Bei einfachen Aufnahmekonfigurationen können auch die Drehwinkel hinreichend gut geschätzt werden.

► Kleine Bilddrehungen:

Sind die Richtungen der Koordinatenachsen von Bild- und Objektsystem ungefähr gleich, können die Drehwinkel (φ , ω , κ) mit den Näherungswerten Null eingeführt werden.

(X_0 , Y_0) können über einen ebenen Rückwärtsschnitt berechnet werden (vgl. VO „Photogrammetrie“). Mit dieser Berechnungsform könnte auch eine eventuelle Verkantung (κ) ermittelt werden. Die Flughöhe über Grund (Z_0 -Z) kann aus Kamerakonstante und näherungsweise bekannten Bildmaßstab – abgeleitet durch Streckenvergleich – berechnet werden.

► In der Literatur gibt es mehrere Algorithmen, welche für die Minimalkonfiguration von 3 Passpunkten konzipiert sind. Sie stützen sich i.a. auf die durch die Aufnahmestrahlen definierte **Sehstrahlpyramide**:

Berechnung aus Winkeln

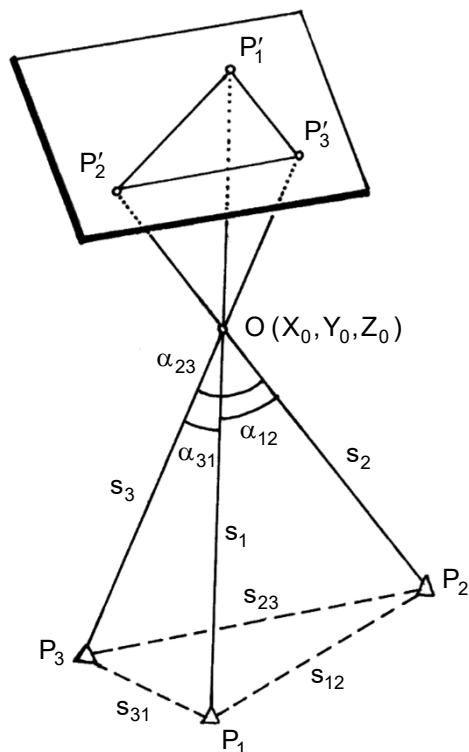
Hier werden \mathbf{X}_0 und \mathbf{R} getrennt ermittelt. Das Verfahren führt zur strengen Lösungen, ist aber iterativ. Es geht davon aus, dass die 3 Koordinaten des Aufnahmeortes durch die 3 Strecken s_i zu den Festpunkten bestimmt sind.

- Schritte:
1. Berechnung der Winkel $\rightarrow \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$
 2. Bestimmung der Kantenlängen $\rightarrow s_1, s_2, s_3$
 3. Räumlicher Bogenschnitt $\rightarrow X_0, Y_0, Z_0$
 4. Bestimmung der Drehmatrix $\rightarrow \mathbf{R}$



2. Einzelbildorientierung

2.3.2 Berechnung von Näherungswerten



Sehstrahlpyramide zur Berechnung
des Aufnahmeortes durch
räumlichen Bogenschnitt

O ist einer der Schnittpunkte der 3 Toren. Der Torus ist eine Fläche 4. Ordnung und daher ist eine geschlossene Lösung des Schnittes dreier Flächen nicht möglich. (vgl. Peripheriewinkelkreis beim ebenen Rückwärtsschnitt.)

Schritt 1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \\ -c \end{pmatrix}$ $|\mathbf{x}_i| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + c^2}$

$$\cos \alpha_{ik} = \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_k}{|\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_k|} = \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x}_i| |\mathbf{x}_k|}$$

$$s_{ik} = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2 + (Z_k - Z_i)^2}$$

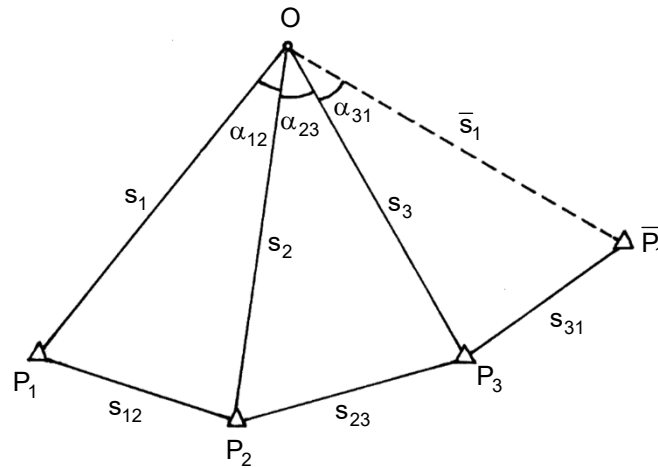


2. Einzelbildorientierung

2.3.2 Berechnung von Näherungswerten

Schritt 2:

Cosinus-Satz: $s_i^2 + s_k^2 - 2s_i s_k \cos \alpha_{ik} - s_{ik}^2 = 0$



4 verschiedene Lösungen möglich!

$$(s_i - s_k \cos \alpha_{ik}) ds_i + (s_k - s_i \cos \alpha_{ik}) ds_k + \frac{1}{2}(s_i^2 + s_k^2 - 2s_i s_k \cos \alpha_{ik} - s_{ik}^2) = 0$$

$$a_{12} ds_1 + a_{21} ds_2 = 0$$

$$a_{23} ds_2 + a_{32} ds_3 = 0$$

$$a_{31} ds_3 + a_{13} ds_1 = 0$$

$$s_1 = (s_1) + ds_1 = \bar{s}_1 + d\bar{s}_1$$

Aus den 3 Gleichungen ergibt sich durch fortlaufendes Einsetzen:

$$ds_1 = -\frac{a_{21} a_{32} a_{13}}{a_{12} a_{23} a_{31}} d\bar{s}_1 = k \cdot d\bar{s}_1$$

$$s_1 = (s_1) + ds_1 = (\bar{s}_1) + d\bar{s}_1 = \bar{s}_1 + \frac{ds_1}{k}$$

$$ds_1 = \frac{\bar{s}_1 - (s_1)}{(1 - 1/k)}, \text{ Iteration bis } ds_1 \leq \varepsilon$$

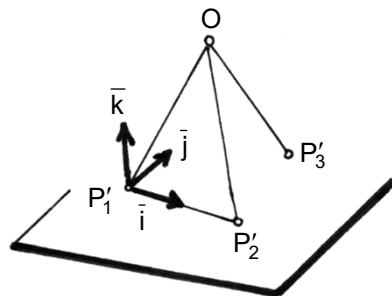
Schritt 3: Räumlicher Bogenschnitt (vgl. Algorithmus von Prof. K. Rinner) $\Rightarrow O (X_0, Y_0, Z_0)$



2. Einzelbildorientierung

2.3.2 Berechnung von Näherungswerten

Schritt 3: Drehmatrix zum Strahlenbündel (elegante Lösung nach Prof. K. Kraus)



Wir definieren ein Dreibein im globalen Objektkoordinatensystem und im Bildkoordinatensystem.

Berechnung der Objektkoordinaten der Bildpunkte P'_1, P'_2 und P'_3 .

$$\text{Dreibein } \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}: \bar{i} = \frac{\overrightarrow{P'_1 P'_2}}{|\overrightarrow{P'_1 P'_2}|}$$

$$\bar{k} = \frac{\overrightarrow{P'_1 P'_2} \times \overrightarrow{P'_1 P'_3}}{|\overrightarrow{P'_1 P'_2} \times \overrightarrow{P'_1 P'_3}|}$$

$$\bar{j} = \bar{k} \times \bar{i}$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir im Bildkoordinatensystem das Dreibein $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

Jedes der beiden Dreibeine definiert eine räumliche Drehmatrix:

$$\bar{\mathbf{R}} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \quad \hat{\mathbf{R}} = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$$

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}'$$

Die gesuchte Drehmatrix ergibt sich aus der Gesamtdrehung:

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}$$

Eine Lösung mit **3 Vollpasspunkten** ohne Linearisierung haben Grafarend, E., Lohse, P., Schaffrin, P. in der ZfV 114, 61 ff., 1989, angeben.

Mit **4 Vollpasspunkten**: Algorithmus nach K. Killian in ÖZfV 43, 97-104, 171-179, 1955.

(Variante 1: 4 Punkte liegen in einer Ebene, Variante 2: 4 Punkte in allgemeiner Lage)

Räumlicher Rückwärtsschnitt nach Müller/ Killian (4 Punkte in allgemeiner Lage): Algorithmus siehe Lehrbuch Prof. Kraus, Photogrammetrie, Band 2.

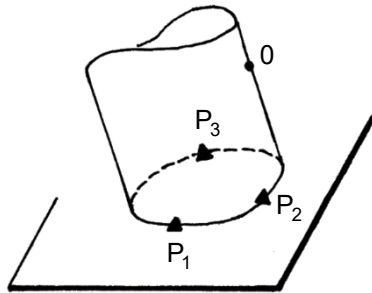
Pose computation overview: https://docs.opencv.org/4.x/d5/d1f/calib3d_solvePnP.html



2. Einzelbildorientierung

2.3.3 Der kritische Ort

Diese „gefährliche“ geometrische Konstellation ist ein **Kreiszyylinder**, auf dem sowohl die 3 Passpunkte als auch der Aufnahmeort liegen. Dieser Zylinder enthält den Umkreis des Festpunktdreiecks, und seine Mantellinien verlaufen senkrecht zur Ebene des Festpunktdreiecks.



Fehler 1. Ordnung in s_1, s_2, s_3 wirken sich auf $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ in 2. Ordnung aus.

Das Gleichungssystem (von vorhin) hat mehrere Lösungen für ds_i (Aufnahmeort), wenn die Gleichungsdeterminante verschwindet.

$ds_1, ds_2, ds_3 \dots$ klein 1. Ordnung

$d\alpha_{12}, d\alpha_{23}, d\alpha_{31} \dots$ klein 2. Ordnung (vernachlässigbar)

= **Gefährlicher Ort 2. Art**, das sind Konfigurationen bei denen sich Fehler in den Messgrößen nicht auswirken.

Mathematische Ableitung siehe Skriptum Prof. K. Rinner.

Bei **vier und mehr Festpunkten** gibt es zwar nicht mehr den gefährlichen Zylinder, aber eine andere gefährliche geometrische Konstellation. Sie liegt dann vor, wenn alle Festpunkte gemeinsam mit dem Aufnahmeort auf einer auf einem Kreiszyylinder liegenden Raumkurve 3. Ordnung, der sogenannten **Horopter-Kurve**, angeordnet sind. (vgl. Lehrbuch Prof. Kraus, Photogrammetrie, Band 2, S. 58)



2. Einzelbildorientierung

2.4 Direkte Lineare Transformation (DLT)

Die Direkte Lineare Transformation ist der sogenannten **projektiven Geometrie** zuzuordnen.

Mit dem Ansatz der **Direkten Linearen Transformation (DLT)** gelingt es, die Orientierungsdaten eines Bildes ohne Näherungswerte in einem linearen Gleichungssystem zu bestimmen (Abdel-Aziz & Karara, 1971).

Das Verfahren basiert auf den Kollinearitätsgleichungen, die um eine Affintransformation der Bildkoordinaten erweitert werden. Es benötigt keine Informationen über ein kamerafestes Koordinatensystem.

Transformationsgleichungen für die DLT

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

Erweiterte Zentralprojektion mit 11 Parametern

$$x = x_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}}$$

$$y = y_0 - d \cdot c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} - m \cdot c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{j}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}}$$

m ... Maßstabsfaktor $m = 1 + dm$
d ... Scherparameter $y = y_1 + d(x-x_0)$

$L_i \Rightarrow \{ \mathbf{X}_0, \mathbf{R}, m, d, x_0, y_0, c \}$
 $\mathbf{X}_0, \mathbf{R}, m, d, x_0, y_0, c \Rightarrow L_i \}$
 \Rightarrow Umrechnungsformeln siehe Lehrbuch Prof. K. Kraus (Photogrammetrie, Band 2)

Berechnung der DLT-Parameter:

x, y ... Bildkoordinaten (i. Allg. affin verzerrte Koordinaten)
X, Y, Z ... gemessene Objektkoordinaten
L₁, ..., L₁₁ ... DLT-Parameter

$$L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4 - x L_9 X - x L_{10} Y - x L_{11} Z - x = 0$$

$$L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8 - y L_9 X - y L_{10} Y - y L_{11} Z - y = 0$$

Für die Bestimmung der 11 DLT-Parameter sind mindestens 6 (eigentlich 5½) Passpunkte erforderlich.



2. Einzelbildorientierung

2.4 Direkte Lineare Transformation (DLT)

$$F(L_i, x, y, X, Y, Z) = F_0((L_i), x, y, X, Y, Z) + \frac{\partial F}{\partial L_i} dL_i + \frac{\partial F}{\partial x} v_x + \frac{\partial F}{\partial y} v_y + \frac{\partial F}{\partial X} v_x + \frac{\partial F}{\partial Y} v_y + \frac{\partial F}{\partial Z} v_z = 0$$

Verbesserungsgleichungen:

v_x	v_y	v_x	v_y	v_z	dL_1	dL_2	dL_3	dL_4	dL_5	dL_6	d_7	dL_8	dL_9	dL_{10}	dL_{11}	W
$-(XL_9 + YL_{10} + ZL_{11} + 1)$	0	$L_1 - xL_9$	$L_2 - xL_{10}$	$L_3 - xL_{11}$	X	Y	Z	1	0	0	0	0	$-xX$	$-xY$	$-xZ$	$(x) - x$
0	$-(XL_9 + YL_{10} + ZL_{11} + 1)$	$L_5 - yL_9$	$L_6 - yL_{10}$	$L_7 - yL_{11}$	0	0	0	0	X	Y	Z	1	$-yX$	$-yY$	$-yZ$	$(y) - y$

$$Av + Bx + w = 0$$

Da jeder Passpunkt nur einmal in jeweils 2 Verbesserungsgleichungen vorkommt, ergibt sich ein quasivermittelnder Ausgleich. Die hier angeführte strenge Lösung kann nur iterativ gelöst werden.

Aus den DLT-Parametern lassen sich dann die gesuchten Orientierungselemente ableiten (siehe auch vorige Seite):

$$L = \frac{-1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}}$$

$$c_x = \sqrt{L^2(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - x_0^2}$$

$$c_y = \sqrt{L^2(L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) - y_0^2}$$

$$c = \frac{(c_x + c_y)}{2}$$

$$x_0 = L^2(L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11})$$

$$y_0 = L^2(L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11})$$

$$r_{11} = L(x_0L_9 - L_1)/c_x$$

$$r_{12} = L(y_0L_9 - L_5)/c_y$$

$$r_{13} = LL_9$$

$$r_{21} = L(x_0L_{10} - L_2)/c_x$$

$$r_{22} = L(y_0L_{10} - L_6)/c_y$$

$$r_{23} = LL_{10}$$

$$r_{31} = L(x_0L_{11} - L_3)/c_x$$

$$r_{32} = L(y_0L_{11} - L_7)/c_y$$

$$r_{33} = LL_{11}$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L_4 \\ L_8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Rotationsmatrix müssen eventuell aufgrund von möglichen Rechenunschärfen auf eine orthonormale Matrix normiert werden. (φ , ω , und κ mit $\text{atan2}()$ -Funktion ermitteln und \mathbf{R} neu rechnen.)

Der Ansatz der DLT kann noch durch zusätzliche Parameter (radial-symmetrische Verzeichnung) erweitert werden.

Anmerkung: Das Computer Vision stellt für die Berechnung der DLT-Parameter andere Lösungswege (z.B. SVD) zur Verfügung.



2. Einzelbildorientierung

2.4 Direkte Lineare Transformation (DLT)

- Vorteile:
- ▶ **Linearer Zusammenhang** zwischen Bild- und Objektkoordinaten
 - ▶ Bildkoordinaten dürfen sich auf nicht-orthogonale Koordinatenachsen unterschiedlichen Maßstabes beziehen.
 - ▶ Die Lage des Bildhauptpunktes kann beliebig sein; es sind also keine Rahmenmarken oder Ersatz-Rahmenmarken am Bildrand zu messen.
 - ▶ Die Kamerakonstante kann unbekannt sein und von Bild zu Bild variieren.
 - ▶ Mit der DLT kann man also auch **Näherungswerte** für die konventionelle Bündeltriangulation bekommen.
- Nachteile:
- ▶ Die in vielen Fällen vorhandene **Überparametrisierung** – sei es, dass die Achsenmaßstäbe gleich sind und keine Scherung vorhanden ist, sei es, dass die Elemente der inneren Orientierung bekannt sind – erfordert **mehr Passpunkte** als eine Lösung mit der Zentralprojektion. Die Überparametrisierung bringt in diesen Fällen eine **Genauigkeitseinbuße** mit sich.
 - ▶ Es kommt zu **singulären** oder **schlecht konditionierten** Gleichungssystemen, wenn alle Passpunkte in einer Objektebene liegen oder wenn die Aufnahmekonstellation dazu führt, dass der Nenner der DLT-Gleichungen zu Null wird.

Mit dem mathematischen Modell der DLT kann nicht nur der räumliche Rückwärtsschnitt gerechnet werden, sondern auch der (überbestimmte) räumliche Vorwärtsschnitt aus n Bildern:

bekannt : L_1^i, \dots, L_{11}^i
 unbekannt : X, Y, Z
 gemessen : x^i, y^i $i = 1, n$

Aus numerischen Gründen ist eine Normierung (*normalization*) der Koordinaten durchzuführen:

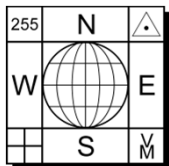
- Zentrieren auf den Schwerpunkt;
- RMS-Entfernung der Punkte vom Schwerpunkt berechnen;
und durch Maßstabsänderung auf $\sqrt{2}$ (Bildraum) bzw. $\sqrt{3}$ (Objektraum) skalieren;
- Berechnung von L_1, \dots, L_{11} ;
- Rückrechnung von L_1, \dots, L_{11} durch Umkehrung der Normalisierung.

Die projektive Transformation $P^2 \rightarrow P^2$ (Homographie) wird durch 8 DLT-Parameter beschrieben.
 Die Berechnung dieser Parameter erfolgt analog wie vorhin für $P^3 \rightarrow P^2$ gezeigt. Es sind **4 Passpunkte** notwendig.

2D-Homographie

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3}{L_7 X + L_8 Y + 1}$$

$$y = \frac{L_4 X + L_5 Y + L_6}{L_7 X + L_8 Y + 1}$$



3. Zweibildorientierung

3.1 Einleitung

Die Rekonstruktion eines dreidimensionalen Objektes aus einem Einzelbild ist ohne Zusatzinformation über das Objekt nicht möglich (vgl. Rekonstruktionsgleichungen). Diese Singularität kann jedoch zusätzliche Aufnahmen behoben werden. Die Objektpunkte lassen sich dann durch räumlichen Vorwärtsschnitt berechnen.

Anzahl der Parameter für Bildorientierung und Objektrekonstruktion für ein Bildpaar:

- (1) Kalibrierte Kamera: 6 Parameter für die äußere Orientierung (EO) pro Bild \Rightarrow 12 insgesamt
 Im Falle einer perfekten Orientierung müssen sich die **homologen Strahlen** im Objektpunkt schneiden
 (= **Komplanaritätsbedingung**). Für die relative Orientierung der beiden Strahlenbündel werden 5 (= 12-7) Parameter benötigt, da die absolute Orientierung (= 3D Ähnlichkeitstransformation) durch 7 Parameter beschrieben werden kann.

- (2) Nicht-kalibrierte Kamera:

Projektive Transformation:

$$P^3 \rightarrow P^2 : \mu X'_{3 \times 1} = P_{3 \times 4} X_{4 \times 1}$$

$$x' = (x', y', 1)^T$$

$$X = (X, Y, Z, 1)^T$$

P ... homogene 3×4 - Matrix
 (mit 11 freien Parametern)

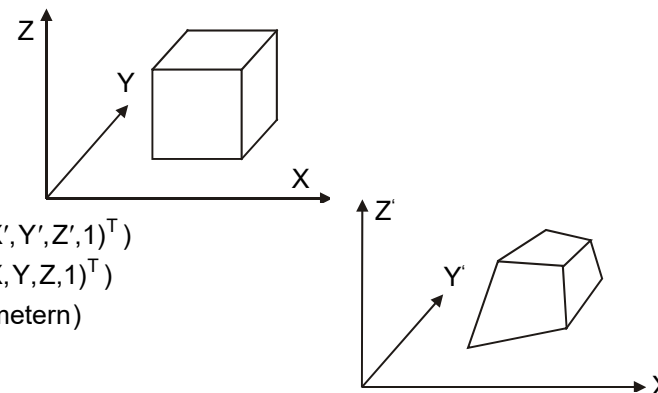
*3D-Homographie:

$$P^3 \rightarrow P^3 : \mu X'_{4 \times 1} = P_{4 \times 4} X_{4 \times 1}$$

X' ... Vektor mit homogenen Koordinaten (z.B. $(X', Y', Z', 1)^T$)

X ... Vektor mit homogenen Koordinaten (z.B. $(X, Y, Z, 1)^T$)

P ... homogene 4×4 - Matrix (mit 15 freien Parametern)



Kameras	#P /Aufnahme	#P /Bildpaar	#P /RO	#P /AO	# CP
kalibriert	6	12	5	7	≥ 3
nicht-kalibriert*	11	22	7	15*	≥ 5

- # P ... Anzahl der unabhängigen Parameter
- RO ... Relative Orientierung (*relative orientation*)
- AO ... Absolute Orientierung (*absolute orientation*)
- # CP ... Minimalanzahl von (Voll-)Passpunkten (*control points*)



3. Zweibildorientierung

3.2 Komplanaritätsbedingung

Ableitung der Komplanaritätsbedingung für Aufnahmen mit kalibrierten Kameras

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}'_0 + \lambda' \mathbf{R}' \mathbf{x}' = \mathbf{X}''_0 + \lambda'' \mathbf{R}'' \mathbf{x}''$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{X}''_0 - \mathbf{X}'_0 = \lambda' \underbrace{\mathbf{R}' \mathbf{x}'}_{\mathbf{p}'} - \lambda'' \underbrace{\mathbf{R}'' \mathbf{x}''}_{\mathbf{p}''} \quad | \cdot \mathbf{p}''$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{a} &= -\mathbf{A} \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$0 = \lambda' (\mathbf{p}' \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{p}'' - \lambda'' \underbrace{(\mathbf{p}'' \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{p}''}_{=0} = \lambda' (\mathbf{p}' \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{p}''$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}'^T \mathbf{B} \mathbf{p}'' = 0 = \mathbf{x}'^T \underbrace{\mathbf{R}'^T \mathbf{B} \mathbf{R}''}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}'' = \mathbf{x}'^T \mathbf{C} \mathbf{x}'' = 0$$

$$r(\mathbf{B}) = 2$$

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{C} \mathbf{x}'' = 0$$

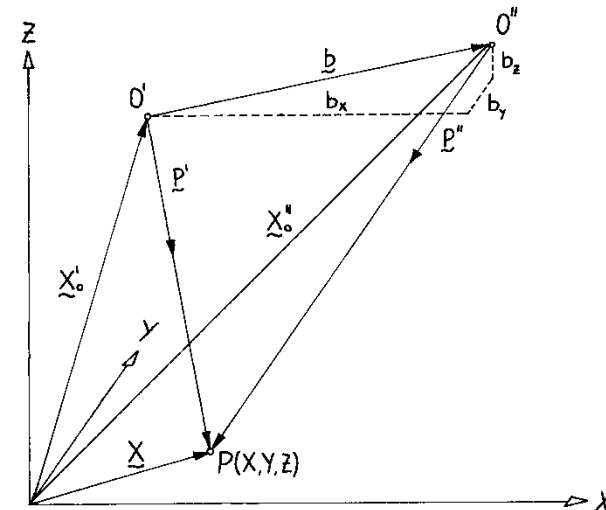
Ko(m)planaritätsbedingung

\mathbf{C} ... Korrelationsmatrix (\rightarrow Computer Vision: \mathbf{E} ... Essentielle Matrix (*essential matrix*))

Die Matrix \mathbf{C} hat 5 Freiheitsgrade.

$$\det(\mathbf{C})=0, \quad r(\mathbf{C})=2$$

Die Komplanaritätsbedingung ist nur dann erfüllt, wenn die 3 Vektoren \mathbf{b} , \mathbf{p}' und \mathbf{p}'' in einer Ebene liegen und daher das von diesen Vektoren aufgespannte Parallelepiped das Volumen Null hat.





3. Zweibildorientierung

3.2 Komplanaritätsbedingung

Ableitung der Komplanaritätsbedingung für Aufnahmen mit nicht-kalibrierten Kameras

Projektion von 3D in 2D ($P^3 \rightarrow P^2$)

$\mathbf{x}' = \mathbf{P}'\mathbf{X}$ linke Aufnahme

$\mathbf{x}'' = \mathbf{P}''\mathbf{X}$ rechte Aufnahme

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix}$... homogene Matrix
 $\mathbf{P}_{3 \times 4}$... Projektionsmatrix (*camera projection matrix*)
 $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{X}$... homogene Vektoren

Euklidische Interpretation von \mathbf{P} :

$\mathbf{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & s & x_0 \\ 0 & c(1+m) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_0 \\ 0 & 1 & 0 & -Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -Z_0 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{I} | -\mathbf{X}_0]}$ mit 11 unabhängigen Parametern
 (Achtung: Definition von \mathbf{R} !)

c ... principal distance	\mathbf{K} ... calibration matrix
x_0, y_0 ... principal point	\mathbf{R} ... rotation matrix
m ... scale difference	\mathbf{I} ... unit matrix (= \mathbf{E} ... Einheitsmatrix)
s ... shear	\mathbf{X}_0 ... projection center

normalized camera: $c = 1, \mathbf{R} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{R}[\mathbf{I} | -\mathbf{X}_0]$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{R}[\mathbf{I} | -\mathbf{X}_0]\mathbf{X}$$



3. Zweibildorientierung

3.2 Komplanaritätsbedingung

Ableitung der Komplanaritätsbedingung für Aufnahmen mit nicht-kalibrierten Kameras

$$\mathbf{x}' = \mathbf{K}'\mathbf{R}'[\mathbf{I} \mid -\mathbf{X}'_0]\mathbf{X}$$

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{K}''\mathbf{R}''[\mathbf{I} \mid -\mathbf{X}''_0]\mathbf{X}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{X}''_0 - \mathbf{X}'_0$$

$${}^n\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{P}'$$

$${}^n\mathbf{x}'' = \mathbf{O}''\mathbf{P}''$$

$${}^n\mathbf{x}' = \mathbf{R}'^T(\mathbf{K}')^{-1}\mathbf{x}'$$

$${}^n\mathbf{x}'' = \mathbf{R}''^T(\mathbf{K}'')^{-1}\mathbf{x}''$$

${}^n\mathbf{x}$... vektor with normalized image coordinates

Coplanarity constraint: →

$$({}^n\mathbf{x}', b, {}^n\mathbf{x}'') = \begin{vmatrix} {}^n x' & b_x & {}^n x'' \\ {}^n y' & b_y & {}^n y'' \\ {}^n 1' & b_z & {}^n 1'' \end{vmatrix} = {}^n\mathbf{x}' \cdot (b \times {}^n\mathbf{x}'') = {}^n\mathbf{x}'^T \mathbf{B} {}^n\mathbf{x}'' = 0$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}$$

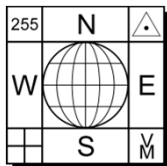
$$\mathbf{x}'^T \underbrace{(\mathbf{K}')^{-T} \mathbf{R}' \mathbf{B} \mathbf{R}''^T (\mathbf{K}'')^{-1}}_{\mathbf{F}} \mathbf{x}'' = 0$$

$$\boxed{\mathbf{x}'^T \mathbf{F} \mathbf{x}'' = 0} \quad \text{Komplanaritätsbedingung}$$

\mathbf{F} ... fundamental matrix

Die Matrix \mathbf{F} hat 7 Freiheitsgrade.

$$\det(\mathbf{F})=0, \quad r(\mathbf{F})=2$$



3. Zweibildorientierung

3.2 Komplanaritätsbedingung

Anmerkungen:

- ▶ andere Bezeichnung für **F**: *matrix of singular (projective) correlation* (= Korrelationsmatrix)
- ▶ Die Komplanaritätsbedingung ist bilinear in den homogenen Bildkoordinaten \mathbf{x}' und \mathbf{x}'' und linear in den Elementen der Fundamentalmatrix. Dies ist die Grundlage für die Bestimmung der Fundamentalmatrix aus homologen Punkten.
- ▶ **F** wird durch 7 unabhängige Parameter bestimmt. **F** ist homogen und singulär (\leftarrow **B** ist singulär; $r(\mathbf{B})=2$). Es sind daher nur 7 homologe Punkte für die Berechnung von **F** notwendig. **F** beinhaltet die gesamte Information über die relative Orientierung der beiden Aufnahmen.

Ableitung der Komplanaritätsbedingung für kalibrierte Kameras:

$$\mathbf{m}' = \mathbf{c}' \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{c}'' \mathbf{K}''^{-1} \mathbf{x}''$$

$$\mathbf{m}'^T \underbrace{\mathbf{R}' \mathbf{B} \mathbf{R}''^T}_{\mathbf{E}} \mathbf{m}'' = 0$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{E} \mathbf{x}'' = 0$$

$\mathbf{E}_{3 \times 3}$... *essential matrix* (Anmerkung: $\mathbf{E} = \mathbf{C}$)

Da die *essential matrix* durch 5 unabhängige Parameter bestimmt ist, müssen 4 Bedingungen gelten:

Beweis durch Prof. K. Rinner (1963):

$$\mathbf{E} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

$$\mathbf{E}^* = (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3^*) \quad (\text{cofactor matrix})$$

$$1. \quad \|\mathbf{E}\|^2 = |\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + |\mathbf{a}_3|^2 = 2 \quad (\rightarrow |\mathbf{b}| = 1)$$

$$2. \quad |\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_1^*|^2 = 1$$

$$3. \quad |\mathbf{a}_2|^2 + |\mathbf{a}_2^*|^2 = 1$$

$$4. \quad |\mathbf{a}_3|^2 + |\mathbf{a}_3^*|^2 = 1$$

$$|\mathbf{E}| = 0 \quad \dots \text{singulär}$$

$$\mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{E} - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{E} \mathbf{E}^T) \mathbf{E} = 0 \quad \dots 9 \text{ Bedingungen}$$

$$\text{SVD}(\mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \quad \text{mit } \mathbf{\Lambda} = \text{Diag}[\lambda, \lambda, 0] \quad \dots \text{Die ersten beiden Singulärwerte sind ident.}$$



3. Zweibildorientierung

3.3 Kernlinien, Kernpunkte, Kernebene

F ... fundamental matrix

■ **Kernebene (epipolar plane):**

$$\pi(P) = (O'O''P)$$

■ **Kernstrahlen (epipolar lines):**

$$l'(P) = (O'P)'$$

$$l' = Fx'' \Rightarrow l'^T x' = 0$$

Kernstrahl l' im linken Bild korreliert mit dem Punkt x'' im rechten Bild.

$$l''(P) = (O'P)''$$

$$l'' = F^T x' \Rightarrow l''^T x'' = 0$$

Kernstrahl l'' im rechten Bild korreliert mit dem Punkt x' im linken Bild.

■ **Kernpunkte (epipoles):**

$$E'' = (O')'' , e'' = P''X'_0$$

$$Fe'' = 0 , x'^T \underbrace{Fe''}_{=0} = 0$$

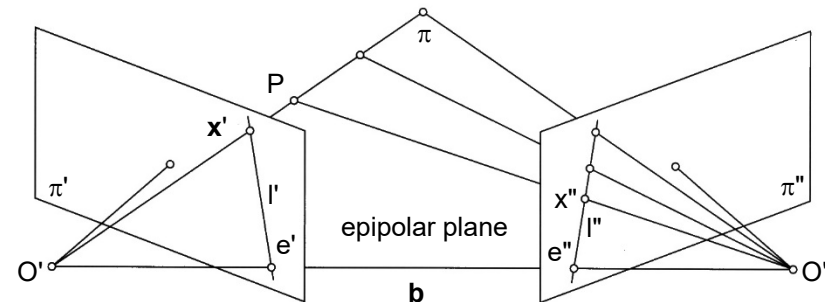
e' und e'' sind Lösungen des homogenen Gleichungssystems.

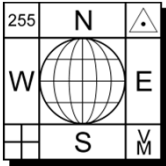
$$E' = (O'')' , e' = P'X''_0$$

$$F^T e' = 0 , x''^T \underbrace{F^T e'}_{=0} = 0$$

Ein Kernstrahl (*epipolar line*) entsteht als Schnittgerade zwischen der Bildebene und der sogenannten Kernebene (*epipolar plane*). Die Kernebene durch die beiden Projektionszentren O' und O'' sowie den jeweiligen Objektpunkt P aufgespannt. Alle Kernstrahlen eines Bildes schneiden einander im so genannten Kernpunkt (*epipole*) E . Er ist der Durchstoßpunkt jener Geraden, die durch die beiden Projektionszentren verläuft, mit der Bildebene. Ein Kernpunkt ist also das Bild des anderen Projektionszentrums. Ein Stereobildpaar hat also zwei Kernpunkte, die Punkte E' und E'' . Korrespondierende Punkte liegen auf den Kernstrahlen.

Anwendung: Einschränken des Suchbereiches beim Image Matching entlang des Kernstrahles bzw. Image Matching mit „epipolar constraint“.





3. Zweibildorientierung

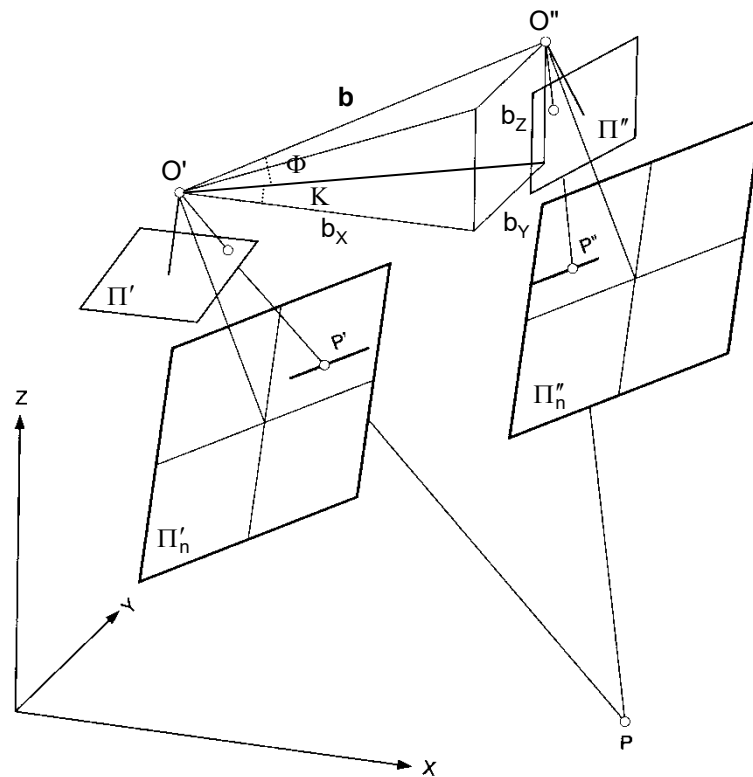
3.4 Berechnung von Normalfallbildern (normalized images)



Die Kernstrahlgeometrie in so genannten Normalbildern (*normalized images*) ist besonders einfach.

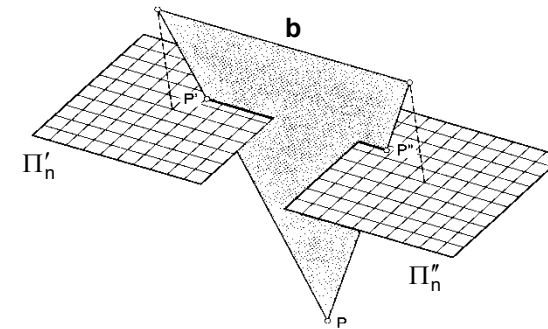
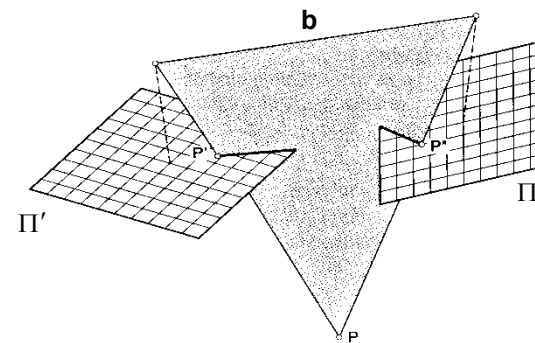
Sie entspricht dem Normalfall der Zweibildauswertung.

⇒ Kernpunkte liegen im Unendlichen ⇒ korrespondierende Kernstrahlen haben die gleiche y-Koordinate.



Normalfalltransformation

Normalbilder lassen sich aus beliebig angeordneten Aufnahmen ableiten – es müssen nur die Parameter der relativen Orientierung bekannt sein.



Resampling



3. Zweibildorientierung

3.4 Berechnung von Normalfallbildern (normalized images)



Angabe der Rechenformeln für kalibrierte Bilder (Bildpaare).

Fall 1: Relative Orientierung durch Bildrotation

$$\mathbf{O}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}'' = \begin{pmatrix} b_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}', \quad \mathbf{R}'' \quad , \quad x_0 = y_0 = 0$$

$$\lambda_n \mathbf{E} \mathbf{x}'_n = \lambda \mathbf{R}' \mathbf{x}'$$

identen Strahlenbündel; \mathbf{E} ... Einheitsmatrix

$$\mathbf{x}'_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \mathbf{R}' \mathbf{x}' = \tau \mathbf{R}' \mathbf{x}'$$

$P^2 \rightarrow P^2$ (2D-Homographie)

$$\begin{aligned} x'_n &= -c_n \frac{i_1 x' + j_1 y' - k_1 c}{i_3 x' + j_3 y' - k_3 c} \\ y'_n &= -c_n \frac{i_2 x' + j_2 y' - k_2 c}{i_3 x' + j_3 y' - k_3 c} \end{aligned}$$

$$c_n = c$$

(vgl. ebene Entzerrung)

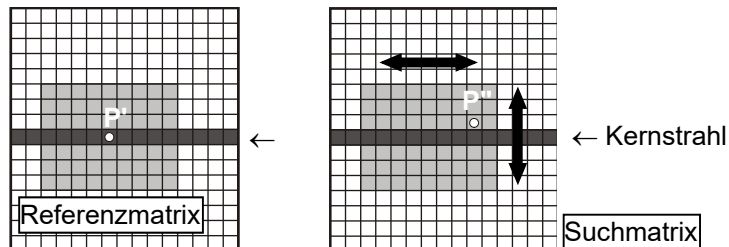
Analoge Formel für den Stereopartner.

Berechnung der Normalbilder durch Resampling. Hierbei ist darauf Acht zu geben, dass kein Informationsverlust entsteht:

⇒ $c_n \geq c$ bei gleicher Bildelementgröße wie im Ausgangsbild

⇒ optimale Grauwerteinterpolation: bi-kubische bzw. Spline-Funktion

Anmerkung: Korrespondierende (homologe) Bildpunkte liegen nun in derselben Bildzeile.



Aufgrund von meist vorhandenen kleinen Bild- und Orientierungsfehlern ist eine geringfügige Lageabweichung des berechneten homologen Bildpunktes quer zum vorgegebenen Kernstrahl zu erwarten.



3. Zweibildorientierung

3.4 Berechnung von Normalfallbildern (normalized images)



Fall 2: Relative Orientierung durch Folgebildanschluss

$$\mathbf{O}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}'' = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{R}'' = \mathbf{R}, \quad x_0 = y_0 = 0$$

Die beiden Hauptstrahlen (Aufnahmerichtungen) der Normalbilder müssen orthogonal zur Basis \mathbf{b} stehen und zueinander parallel sein.

Grundgedanke: Stereomodell durch Drehen des Basisvektors \mathbf{b} um O' in die \mathbf{e}_1 -Achse überführen, um die Voraussetzung von Fall 1 zu erzielen. Eine Kompensation der mittleren Querneigung Ω der Aufnahmerichtung kann ebenfalls berücksichtigt werden; Ω kann im Prinzip frei gewählt werden.

$$\Omega = \frac{(\omega' + \omega'')}{2}, \quad \kappa = \arctan \frac{b_y}{b_x}, \quad \Phi = -\arctan \frac{b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

$$\lambda_n \mathbf{R}_K \mathbf{R}_\Phi \mathbf{R}_\Omega \mathbf{x}'_n = \lambda' \mathbf{R}' \mathbf{x}' \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}'_n = \tau' \mathbf{R}'^T \mathbf{R}_\Omega^T \mathbf{R}_\Phi^T \mathbf{R}_K^T \mathbf{R}' \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{x}''_n = \tau'' \mathbf{R}''^T \mathbf{R}_\Omega^T \mathbf{R}_\Phi^T \mathbf{R}_K^T \mathbf{R}'' \mathbf{x}''$$

$$\mathbf{x}'_n = \tau' (\mathbf{R}_K \mathbf{R}_\Phi \mathbf{R}_\Omega)^T \mathbf{R}' \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{x}''_n = \tau'' (\mathbf{R}_K \mathbf{R}_\Phi \mathbf{R}_\Omega)^T \mathbf{R}'' \mathbf{x}''$$

$$\text{Kontrolle: } \bar{\mathbf{b}} = (\mathbf{R}_K \mathbf{R}_\Phi \mathbf{R}_\Omega)^T \mathbf{b} = (|\mathbf{b}| \ 0 \ 0)^T$$

$$\mathbf{x}'_n = \tau' \bar{\mathbf{R}}' \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{x}''_n = \tau'' \bar{\mathbf{R}}'' \mathbf{x}''$$

Andere Lösungsmöglichkeit: Definition der Drehung durch Drehachse \mathbf{a} und Drehwinkel $\alpha \rightarrow \mathbf{a} = -\frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{b}}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{b}|}, \quad \cos \alpha = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

Ein Algorithmus zur Umbildung von nicht-kalibrierten Aufnahmen wird z.B. in Hartley & Zissermann, 2003, Multiple View Geometry in Computer Vision, S. 302-307, beschrieben.



3. Zweibildorientierung

3.5 Iterative Lösung - Folgebildanschluss

Relative Orientierung durch Folgebildanschluss

Eine Aufnahme wird festgehalten, die andere verdreht (3 Parameter) und verschoben (3 Parameter).
Da der Maßstab für die Modellherstellung ohne Bedeutung ist, erfolgt keine Verschiebung in Richtung X.

Vorausgesetzt: bekannte innere Orientierung

gegebene Näherungen: (\mathbf{R}'') , (\mathbf{b})

gesuchte Parameter: $da_1'', da_2'', da_3'', db_Y, db_Z; db_X = 0$

$$d\mathbf{R}'' = \mathbf{E} + d\mathbf{A}''; \quad d\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 0 & -da_3'' & da_2'' \\ da_3'' & 0 & -da_1'' \\ -da_2'' & da_1'' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}'' = d\mathbf{R}''(\mathbf{R}'') \quad (\mathbf{p}', \mathbf{p}'', \mathbf{b}) = 0$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b}) + d\mathbf{b}$$

Komplanaritätsbedingung: $\overbrace{(\mathbf{p}', (\mathbf{p}'') + d\mathbf{a}'' \times (\mathbf{p}''), (\mathbf{b}) + d\mathbf{b})} = 0$

Linearform: $da'' \cdot \mathbf{v} + d\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + \alpha_0 = 0$

mit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}; \mathbf{u} = \mathbf{p}' \times (\mathbf{p}'')$
 $\mathbf{v} = (\mathbf{b})[\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{p}'')] - \mathbf{p}'[(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{p}'')]$
 $\alpha_0 = (\mathbf{p}', (\mathbf{p}''), (\mathbf{b}))$

$$\alpha_1 da_1'' + \alpha_2 da_2'' + \alpha_3 da_3'' + \beta_2 db_Y + \beta_3 db_Z + \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} (b_X) & u' & 0 \\ (b_Y) & v' & -(w'') \\ (b_Z) & w' & (v'') \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} (b_X) & u' & (w'') \\ (b_Y) & v' & 0 \\ (b_Z) & w' & -(u'') \end{vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} (b_X) & u' & -(v'') \\ (b_Y) & v' & (u'') \\ (b_Z) & w' & 0 \end{vmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} v' & w' \\ (v'') & (w'') \end{vmatrix} \quad \beta_2 = -\begin{vmatrix} u' & w' \\ (u'') & (w'') \end{vmatrix} \quad \beta_3 = \begin{vmatrix} u' & v' \\ (u'') & (v'') \end{vmatrix} \quad \alpha_0 = \begin{vmatrix} u & (u'') & (b_X) \\ v & (v'') & (b_Y) \\ w & (w'') & (b_Z) \end{vmatrix}$$

5 homologe Punkte einsetzen und das inhomogene Gleichungssystem lösen \Rightarrow

Lagrangesche Identität:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Ableitung:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}', (\mathbf{p}'') + d\mathbf{a}'' \times (\mathbf{p}''), (\mathbf{b}) + d\mathbf{b}) &= 0 \\ -((\mathbf{p}'') + d\mathbf{a}'' \times (\mathbf{p}''), \mathbf{p}', (\mathbf{b}) + d\mathbf{b}) &= 0 \\ -((\mathbf{p}'') + d\mathbf{a}'' \times (\mathbf{p}''), \mathbf{p}' \times (\mathbf{b}) + \mathbf{p}' \times d\mathbf{b}) &= 0 \\ -[(\mathbf{p}''), \mathbf{p}', (\mathbf{b})] + ((\mathbf{p}''), \mathbf{p}', d\mathbf{b}) + (d\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{p}')((\mathbf{p}'') \cdot (\mathbf{b})) - \\ - (d\mathbf{a}'' \cdot (\mathbf{b}))((\mathbf{p}'') \cdot \mathbf{p}')] + \text{Glieder klein 2. Ordnung} &= 0 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{p}', (\mathbf{p}''), (\mathbf{b})) + [(\mathbf{p}' \times (\mathbf{p}'')) \cdot d\mathbf{b} + d\mathbf{a}'' \cdot \{(\mathbf{b})[\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{p}'')] - \mathbf{p}'[(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{p}'')]\}] = 0$$

q.e.d.



3. Zweibildorientierung

3.5 Iterative Lösung - Folgebildanschluss

cont.

Ergebnis: da'' , db

Für kleine da'' gilt $dR'' = \begin{pmatrix} 1 & -da''_3 & da''_2 \\ da''_3 & 1 & -da''_1 \\ -da''_2 & da''_1 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. allgemein

$dR'' = dR''(da''_1, da''_2, da''_3)$... durch strenge Berechnung der Rotationsmatrix

Iteration bis $dR = E$

Bei mehr als 5 homologen Punkten \Rightarrow Ausgleich

Messgrößen: x' , y' , x'' , y''

Ableitung der Komplanaritätsbedingung nach den Messgrößen \rightarrow

$$\frac{\partial(p', (p''), (b))}{\partial x'} = (i', (p''), (b)) = \gamma_1, \quad \frac{\partial(p', (p''), (b))}{\partial y'} = (j', (p''), (b)) = \gamma_2$$

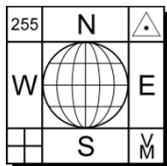
$$\frac{\partial(p', (p''), (b))}{\partial x''} = (p', (i''), (b)) = \gamma_3, \quad \frac{\partial(p', (p''), (b))}{\partial y''} = (p', (j''), (b)) = \gamma_4$$

Linearform: $v'_x \gamma_1 + v'_y \gamma_2 + v''_x \gamma_3 + v''_y \gamma_4 + \alpha_1 da''_1 + \alpha_2 da''_2 + \alpha_3 da''_3 + \beta_2 db_y + \beta_3 db_z + \alpha_0 = 0$

Lösung nach dem Sonderfall des Allgemeinfalles der Ausgleichsrechnung (= quasivermittelnder Ausgleich)

v'_{x_1}	v'_{y_1}	v''_{x_1}	v''_{y_1}	v'_{x_2}	v'_{y_2}	v''_{x_2}	v''_{y_2}	v'_{x_3}	v'_{y_3}	v''_{x_3}	v''_{y_3}	...
_____				0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	_____				0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	_____				

Koeffizientenschema



3. Zweibildorientierung

3.6 Iterative Lösung - Bild Drehungen

Relative Orientierung durch Bild Drehungen

Die Basis wird frei gewählt. 3 Drehungen je Bild stehen zur Verfügung. Da die gemeinsame Bewegung der Bilder um die Basis zur Modellherstellung nicht benötigt wird, wird ein ω fest gewählt.

Vorausgesetzt: bekannte innere Orientierung

gegebene Näherungen: (R') , (R'')

gesuchte Parameter: $da'_2, da'_3, da''_1, da''_2, da''_3$; $da'_1 = 0$

$$R' = dR'(R')$$

$$(b, p', p'') = 0$$

$$R'' = dR''(R'')$$

Koplanaritätsbedingung: $(b, (p') + da' \times (p''), (p'') + da'' \times (p')) = 0$

Linearform: $da' \cdot v' + da'' \cdot v'' + \alpha_0 = 0$

mit $v' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)^T = (p'')[b \cdot (p')] - b[(p'') \cdot (p')]$

$v'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3)^T = b[(p') \cdot (p'')] - (p')[b \cdot (p'')]$

$\alpha_0 = (b, (p'), (p''))$

$$\alpha'_2 da'_2 + \alpha'_3 da'_3 + \alpha''_1 da''_1 + \alpha''_2 da''_2 + \alpha''_3 da''_3 + \alpha_0 = 0$$

$$dR' = E + dA'; \quad dA' = \begin{pmatrix} 0 & -da'_3 & da'_2 \\ da'_3 & 0 & 0 \\ -da'_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dR'' = E + dA''; \quad dA'' = \begin{pmatrix} 0 & -da''_3 & da''_2 \\ da''_3 & 0 & -da''_1 \\ -da''_2 & da''_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: da' , da'' ; Aufstellung der Drehmatrix siehe vorhin.

Iteration bis $dR=E$

Bei mehr als 5 homologen Punkten \Rightarrow Ausgleich

Messgrößen: x', y', x'', y''

Ableitung der Koplanaritätsbedingung nach den Messgrößen siehe vorhin \rightarrow

Linearform: $v'_x \gamma_1 + v'_y \gamma_2 + v''_x \gamma_3 + v''_y \gamma_4 + \alpha'_2 da'_2 + \alpha'_3 da'_3 + \alpha''_1 da''_1 + \alpha''_2 da''_2 + \alpha''_3 da''_3 + \alpha_0 = 0$

Koeffizientenschema siehe vorhin.



3. Zweibildorientierung

3.7 Parallaxengleichung für den Normalfall

Parallaxengleichung für den Normalfall

Linearisierung der Komplanaritätsbedingung wie vorhin.

Allgemeine Darstellung:

$$v'_x \gamma_1 + v'_y \gamma_2 + v''_x \gamma_3 + v''_y \gamma_4 + \alpha'_1 da'_1 + \alpha'_2 da'_2 + \alpha'_3 da'_3 + \alpha''_1 da''_1 + \alpha''_2 da''_2 + \alpha''_3 da''_3 + \beta_1 db_x + \beta_2 db_y + \beta_3 db_z + \alpha_0 = 0$$

Berechnung der Koeffizienten für den Normalfall: $(\varphi) = (\omega) = (\kappa) = 0$

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}') &= (\mathbf{i}'') = \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{j}') &= (\mathbf{j}'') = \mathbf{e}_2 \\ (\mathbf{k}') &= (\mathbf{k}'') = \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -c \end{pmatrix} \quad (\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0 & \alpha'_1 &= -b(y''y' + c^2) & \alpha''_1 &= b(yy'' + c^2) & \beta_1 &= -c(y' - y'') & \alpha_0 &= -bc(y' - y'') \\ \gamma_2 &= -bc & \alpha'_2 &= bx'y'' & \alpha''_2 &= -by'x'' & \beta_2 &= c(x' - x'') \\ \gamma_3 &= 0 & \alpha'_3 &= -bcx' & \alpha''_3 &= bx''c & \beta_3 &= x'y'' - x''y' \\ \gamma_4 &= bc \end{aligned}$$

$$y' \approx y'' = y \quad ; \quad y' - y'' = p_y \quad ; \quad v'_y - v''_y = v_{py}$$

Parallaxengleichung in Bildkoordinatendarstellung:

$$p_y + v_{py} = \frac{x' - x''}{b} db_y + \frac{y(x' - x'')}{bc} db_z + \frac{x'y}{c} d\varphi' - \frac{y^2 + c^2}{c} d\omega' - x'd\kappa' - \frac{x''y}{c} d\varphi'' + \frac{y^2 + c^2}{c} d\omega'' + x''d\kappa''$$

p_y ... Bildparallaxe

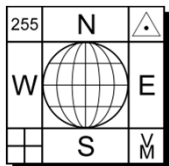
$$\begin{cases} x' = \frac{c}{h} X & x'' = \frac{c}{h} (X - b) \\ y = \frac{c}{h} Y \\ p_y = \frac{c}{h} p_Y \end{cases}$$

Parallaxengleichung in Objektkoordinatendarstellung:

$$p_Y + v_{pY} = db_Y + \frac{Y}{h} db_Z + \frac{XY}{h} d\varphi' + h \left(1 + \frac{Y^2}{h^2}\right) (d\omega'' - d\omega') - X d\kappa' - \frac{(X - b)Y}{h} d\varphi'' + (X - b) d\kappa''$$

p_Y ... Objektparallaxe

$$-h = Z - Z_0$$



3. Zweibildorientierung

3.8 Spezielle Verfahren des CV

In diesem Abschnitt werden direkte, lineare Berechnungsmethoden zur Bestimmung von **F** und **E** vorgestellt.

- Zweck: ■ Näherungswertbestimmung für eine strenge Lösung (Bündelblockausgleichung)
 ■ Robuste Schätzung mit dem RANSAC-Algorithmus (Random Sample Consensus; Fischer & Bolles, 1981)

- Es gibt zahlreiche Algorithmen: ① Berechnung von **F** für $n \geq 8$ Punkte (gilt auch für **E**) → Eight-Point Algorithm (Hartley, 1997)
 ② Berechnung von **F** für $n = 7$ Punkte (gilt auch für **E**)
 ③ Berechnung von **E** für $n = 6$ Punkte
 ④ Berechnung von **E** für $n \geq 4$ komplanare Punkte in 3D
 ⑤ Berechnung von **E** für $n \geq 5$ → Five-Point Algorithm (Nistér, 2004)
- ①- ③: Objektpunkte dürfen nicht in einer Ebene liegen.

Minimierung: algebraische Fehler vs. geometrische Fehler

ad ①: The normalized 8-point algorithm

$$\mathbf{x}_n^T \mathbf{F} \mathbf{x}_n = \mathbf{w}_n = 0 \quad n = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{a}_n^T \mathbf{f} = \mathbf{w}_n = 0 \quad n = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{a}_n^T = (x'x'', x'y', x''y'', y'x'', y''y', y''x', x', y', 1)_n$$

$$\mathbf{f} = \text{vec}(\mathbf{F})$$

$$\mathbf{f}^T = (F_{11}, F_{21}, F_{31}, F_{12}, F_{22}, F_{32}, F_{13}, F_{23}, F_{33})$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_n^T]$$

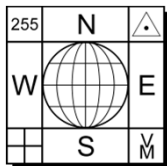
$\|\mathbf{A}\mathbf{f}\| = \text{Minimum mit Bedingung } \|\mathbf{f}\| = 1$

Minimierung von $\mathbf{w}^T \mathbf{w}$ ⇒ algebraische Lösung durch SVD (*singular value decomposition*) → Lösung ist der rechte Eigenvektor von **A**
 (= Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert),
 eindeutige Lösung nur bei $r(\mathbf{A}) \geq 8$.

Da die Bedingung $\det(\mathbf{F}) = 0$ (*singularity constraint*) in der Berechnung nicht berücksichtigt ist, ist die Lösung keine gültige Fundamentalmatrix.

Lösungsmöglichkeit: SVD von $\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ mit $\mathbf{\Lambda} = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ → kleinsten Singulärwert $\lambda_3 = 0$ setzen ⇒ $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{V}^T$ mit $\hat{\mathbf{\Lambda}} = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$

- Keine Lösung: ▶ Objektpunkte liegen in einer Ebene (*planar set of points*)
 ▶ Objektpunkte und die Projektionszentren liegen auf dem kritischen Ort (*critical surface*) → Regelfläche (*ruled quadric surface*)



3. Zweibildorientierung

3.8 Spezielle Verfahren des CV

Objective

Given $n \geq 8$ image point correspondences $\{\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i\}$, determine the fundamental matrix F such that $\mathbf{x}'_i{}^T F \mathbf{x}_i = 0$.

Algorithm

- (i) **Normalization:** Transform the image coordinates according to $\hat{\mathbf{x}}_i = T\mathbf{x}_i$ and $\hat{\mathbf{x}}'_i = T'\mathbf{x}'_i$, where T and T' are normalizing transformations consisting of a translation and scaling.
- (ii) Find the fundamental matrix \hat{F}' corresponding to the matches $\hat{\mathbf{x}}_i \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}'_i$ by
 - (a) **Linear solution:** Determine \hat{F} from the singular vector corresponding to the smallest singular value of \hat{A} , where \hat{A} is composed from the matches $\hat{\mathbf{x}}_i \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}'_i$ as defined in (11.3).
 - (b) **Constraint enforcement:** Replace \hat{F} by \hat{F}' such that $\det \hat{F}' = 0$ using the SVD (see section 11.1.1).
- (iii) **Denormalization:** Set $F = T'^T \hat{F}' T$. Matrix F is the fundamental matrix corresponding to the original data $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$.

The normalized 8-point algorithm for F (Multiple View Geometry in CV; Hartley & Zisserman, 2003, p. 282)



3. Zweibildorientierung

3.8 Spezielle Verfahren des CV

Objective Compute the fundamental matrix between two images.

Algorithm

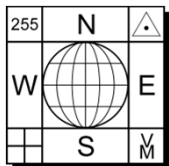
- (i) **Interest points:** Compute interest points in each image.
- (ii) **Putative correspondences:** Compute a set of interest point matches based on proximity and similarity of their intensity neighbourhood.
- (iii) **RANSAC robust estimation:** Repeat for N samples, where N is determined adaptively as in algorithm 4.5(p121):
 - (a) Select a random sample of 7 correspondences and compute the fundamental matrix F as described in section 11.1.2. There will be one or three real solutions.
 - (b) Calculate the distance d_{\perp} for each putative correspondence.
 - (c) Compute the number of inliers consistent with F by the number of correspondences for which $d_{\perp} < t$ pixels.
 - (d) If there are three real solutions for F the number of inliers is computed for each solution, and the solution with most inliers retained.

Choose the F with the largest number of inliers. In the case of ties choose the solution that has the lowest standard deviation of inliers.

- (iv) **Non-linear estimation:** re-estimate F from all correspondences classified as inliers by minimizing a cost function, e.g. (11.6), using the Levenberg–Marquardt algorithm of section A6.2(p600).
- (v) **Guided matching:** Further interest point correspondences are now determined using the estimated F to define a search strip about the epipolar line.

The last two steps can be iterated until the number of correspondences is stable.

Algorithm to automatically estimate the fundamental matrix between two images using RANSAC
(Multiple View Geometry in CV; Hartley & Zisserman, 2003, p. 291)



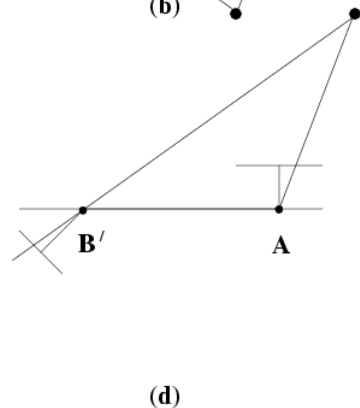
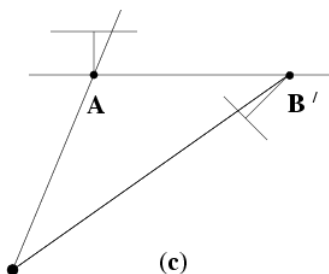
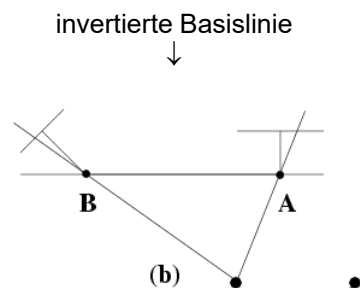
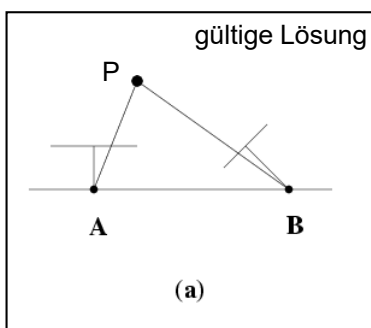
3. Zweibildorientierung

3.8 Spezielle Verfahren des CV

Berechnung der Orientierungsparameter aus **E**:

Folgebildanschluss: *essential matrix* $E = R'BR^T = BR'^T$; $R' = I$

Lösung durch SVD. Die Singulärwertzerlegung führt zu 4 Lösungen der RO, von denen nur eine gültig ist: Jene Lösung, wo sich die homologen Strahlen vor den beiden Kameras schneiden (vgl. Hartley, 1992).



← Kamera B um 180° um die Basislinie gedreht

4 verschiedene Lösungen der RO für kalibrierte Aufnahmen



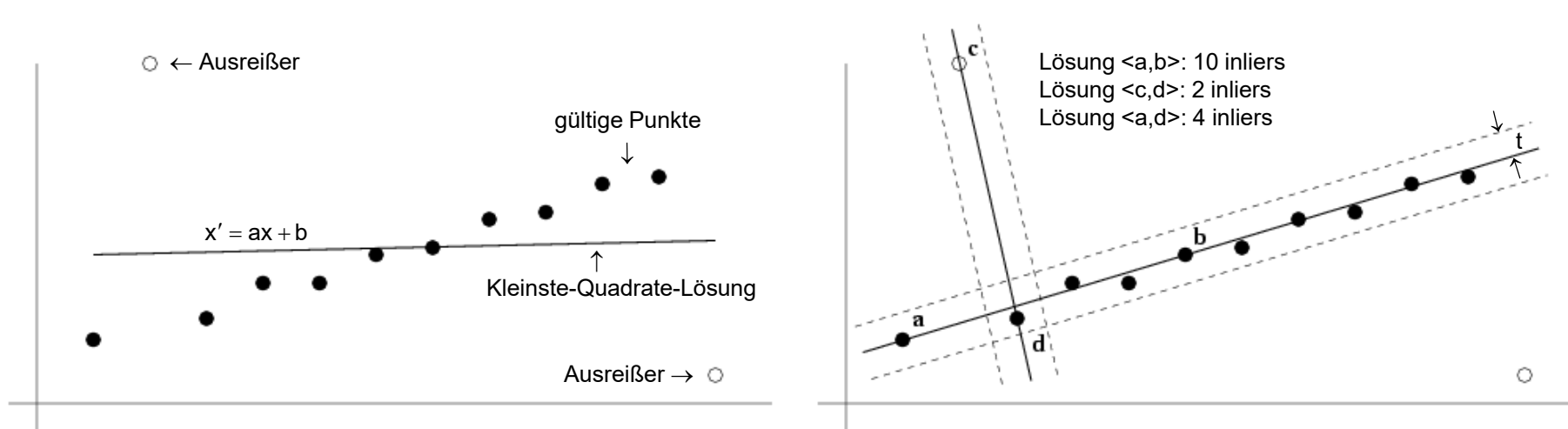
3. Zweibildorientierung

3.9 RANSAC (Random Sample Consensus) Algorithmus



Der RANSAC-Algorithmus ist ein gegenüber Ausreißern (*outliers*) sehr robustes Schätzverfahren bei der parametrischen Modellierung von Punktzuordnungen $\{x_i \leftrightarrow X_i\}$. Ziel des Algorithmus ist es, aus den gegebenen Punktzuordnungen die gültigen (*inliers*) zu bestimmen, um die Transformationsparameter in optimaler Art und Weise schätzen zu können. Der RANSAC-Algorithmus wird besonders häufig im Bereich des Computer Vision eingesetzt. Der Algorithmus bleibt auch bei einer sehr großen Anzahl von Ausreißern robust.

Originalpublikation: M.A. Fischer, R.C. Bolles, 1981. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. Comm. of ACM, Vol. 24, pp. 381-395.



RANSAC ... **RAN**dom **SA**mple **C**onsensus

(Quelle: Multiple View Geometry, Hartley and Zisserman, 2003)



3. Zweibildorientierung

3.9 RANSAC (Random Sample Consensus) Algorithmus



Objective

Robust fit of a model to a data set S which contains outliers.

Algorithm

- (i) Randomly select a sample of s data points from S and instantiate the model from this subset.
- (ii) Determine the set of data points S_i which are within a distance threshold t of the model.
The set S_i is the consensus set of the sample and defines the inliers of S .
- (iii) If the size of S_i (the number of inliers) is greater than some threshold T , re-estimate the model using all the points in S_i and terminate.
- (iv) If the size of S_i is less than T , select a new subset and repeat the above.
- (v) After N trials the largest consensus set S_i is selected, and the model is re-estimated using all the points in the subset S_i .

What is a distance threshold?

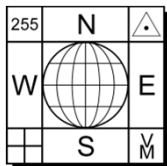
Die Wahl des Schwellwertes t kann statistisch (kumulative χ^2 -Verteilung) begründet werden: Messfehler in x und y sind normalverteilt mit $N(0, \sigma)$.

d_{\perp}^2 = Summe der quadratischen Messfehler \rightarrow folgt einer χ^2 -Verteilung mit m Freiheitsgraden.

$$\begin{cases} \text{inlier} & d_{\perp}^2 < t^2 \\ \text{outlier} & d_{\perp}^2 \geq t^2 \end{cases} \dots \text{with } t^2 = F_m^{-1}(\alpha)\sigma^2$$

m	Modell	t^2 ($\alpha=0.95$)	t^2 ($\alpha=0.99$)
1	<u>Linie</u> , Fundamentalmatrix	$3.84 \sigma^2$	$6.63 \sigma^2$
2	<u>Punkt</u> , Homographie, Projektionsmatrix	$5.99 \sigma^2$	$9.21 \sigma^2$
3	Trifocal Tensor	$7.81 \sigma^2$	$11.34 \sigma^2$

The distance threshold $t^2 = F_m^{-1}(\alpha)\sigma^2$ for a probability of $\alpha = 0.95(0.99)$ that the point (correspondence) is an inlier.



3. Zweibildorientierung

3.9 RANSAC (Random Sample Consensus) Algorithmus



How many samples?

$$N = \frac{\log(1-p)}{\log(1-(1-\epsilon)^s)}$$

- 1-p ... probability of N consecutive failures
- 1-ε ... probability of a randomly selected data item being part of a good model
- s ... size of a sample
- N ... Number of samples required

Beweis durch statistische Variationsrechnung.

Table gives examples of N for p=0.99 for a given s and ε.

sample size s	proportion of outliers ε						
	5%	10%	20%	25%	30%	40%	50%
2	2	3	5	6	7	11	17
3	3	4	7	9	11	19	35
4	3	5	9	13	17	34	72
5	4	6	12	17	26	57	146
6	4	7	16	24	37	97	293
7	4	8	20	33	54	163	588
8	5	9	26	44	78	272	1177

The number N of samples required to ensure, with a probability p=0.99, that at least one sample has no outlier for a given size of sample, s, and proportion of outliers, ε.

Beispiel der Ausgleichsgeraden: n = 12 Punkte (10 gültige Punkte, 2 Ausreißer);
 ε = 2/12 = 1/6;
 mit s=2 folgt, dass mindestens N=4 Ziehungen notwendig sind, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% (p = 0.99) eine gültige Lösung zu finden.

$$N = \frac{\log(1-p)}{\log(1-(1-\epsilon)^s)} = \frac{\log(1-\frac{99}{100})}{\log(1-(1-\frac{1}{6})^s)} = \frac{-2}{\log(0.305)} = 3.88$$



3. Zweibildorientierung

3.9 RANSAC (Random Sample Consensus) Algorithmus

How large is an acceptable consensus set?

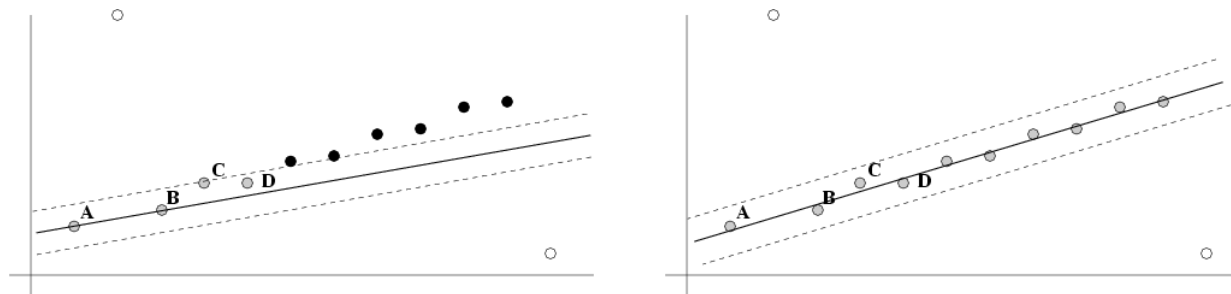
A rule of thumb is to terminate if the size of the consensus set is similar to the number of inliers believed to be in the data set, given the assumed proportion of outliers, i.e. for n data points $T=(1-\varepsilon)n$.

Beispiel der Ausgleichsgeraden: Für eine konservative Schätzung von $\varepsilon=0.2$ ergibt sich T mit 10. $T=(1-0.2)12$

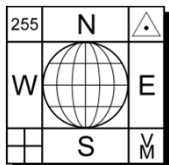
Da in der Praxis ε oft unbekannt ist, wird in der Regel N adaptiv ermittelt (vgl. unten angeführter Algorithmus).

- ▶ $N = \infty$, sample_count=0
- ▶ While $N > \text{sample_count}$ repeat
 - ▷ Choose a sample and count the number of inliers
 - ▷ Set $\varepsilon = 1 - (\text{number of inliers})/(\text{total number of points})$
 - ▷ Compute N from ε , s and $p=0.99$
 - ▷ Increment the sample-count by 1
- ▶ Terminate

Adaptive algorithm for detecting the number of RANSAC samples.



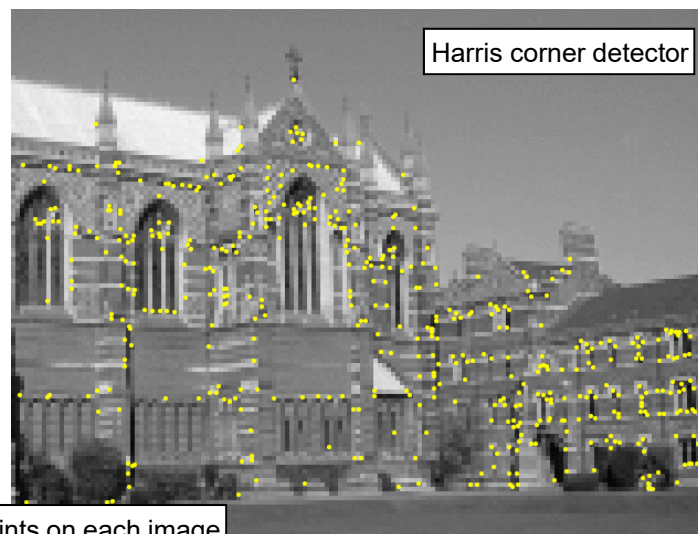
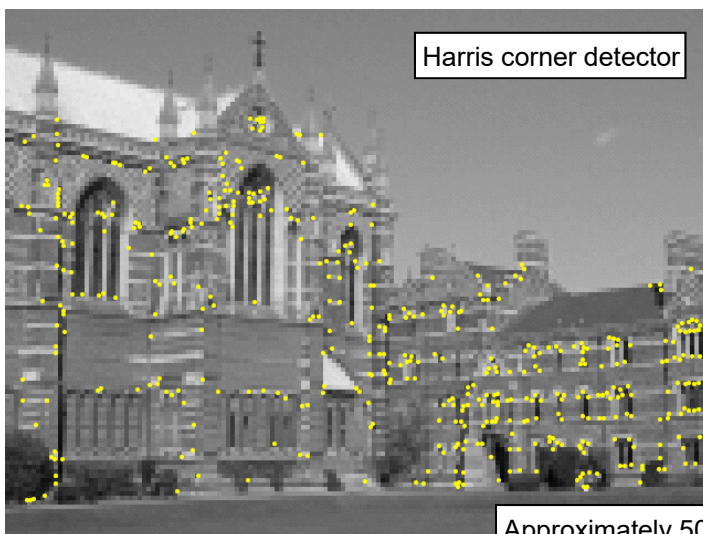
Weitere Modifikation: Ziehung A und B \Rightarrow C und D sind gültige Lösungen
 \rightarrow Kleinste-Quadrate-Lösung mit A, B, C und D \Rightarrow 10 gültige Lösungen (*inliers*)



3. Zweibildorientierung

3.9 RANSAC (Random Sample Consensus) Algorithmus

Automatic computation of a homography between two images using RANSAC



Approximately 500 points on each image

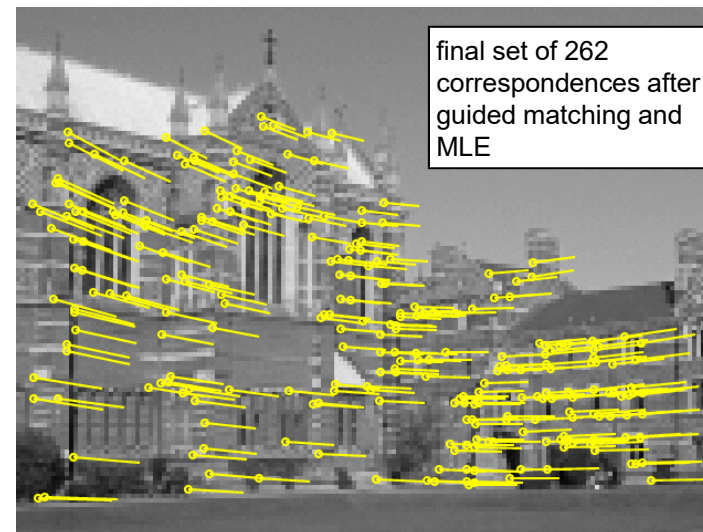
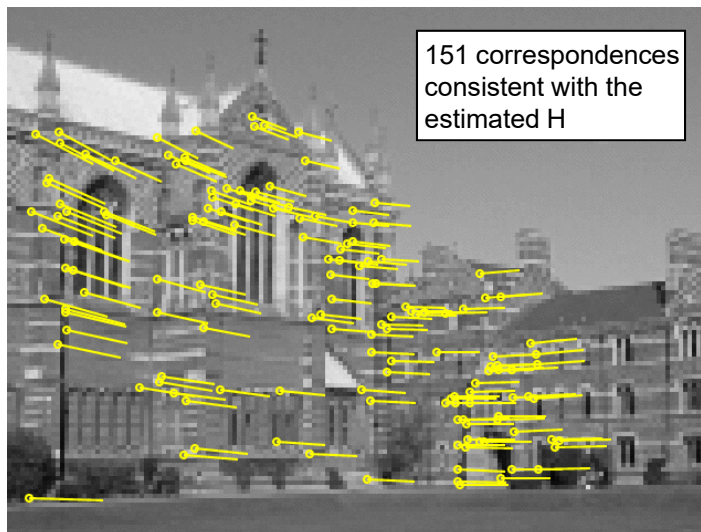
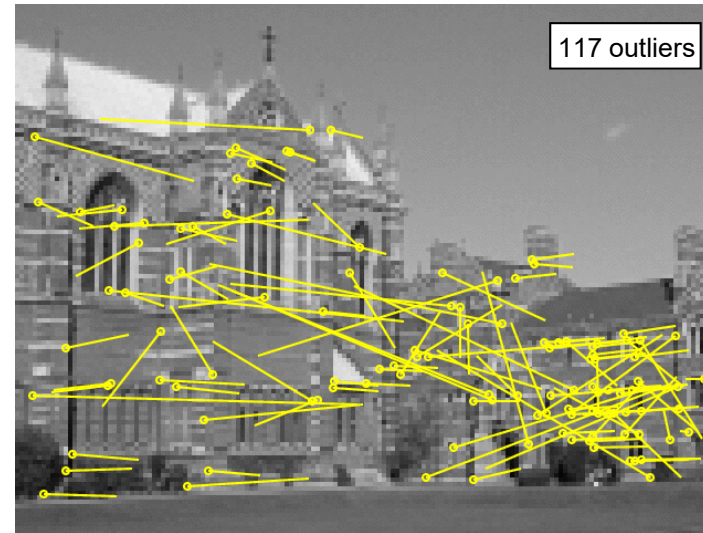
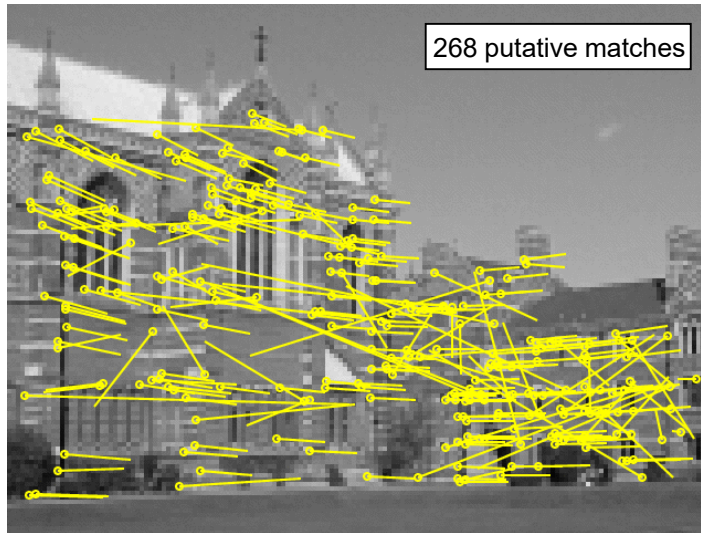
Quelle:
Multiple View
Geometry;
Hartley &
Zisserman,
2003



3. Zweibildorientierung

3.9 RANSAC (Random Sample Consensus) Algorithmus

Automatic computation of a homography between two images using RANSAC



43 samples required for $p=0.99$ prob of no outliers in the sample.

inlier threshold $t=1.25$ pixel

Quelle:
Multiple View
Geometry;
Hartley &
Zisserman,
2003



3. Zweibildorientierung

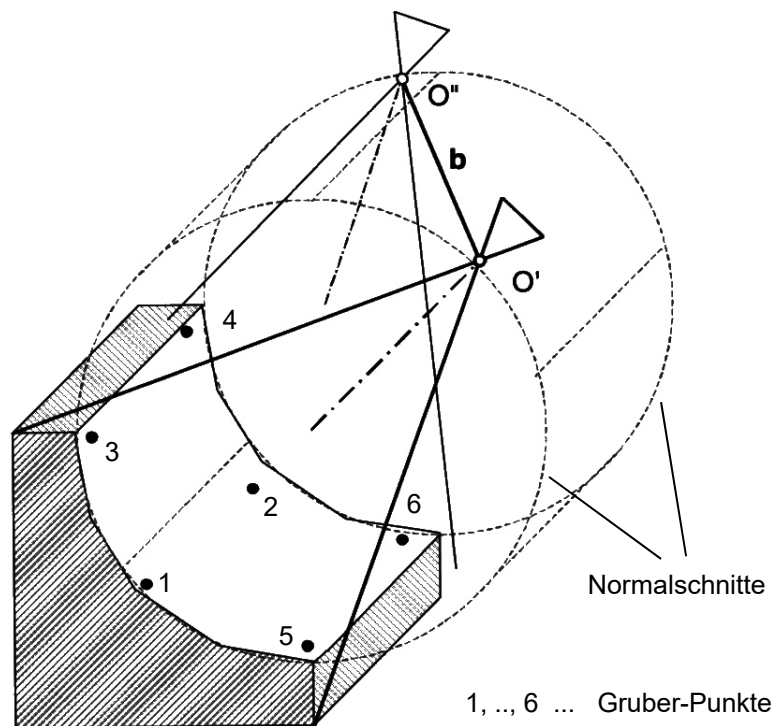
3.10 Gefährlicher Konfiguration der relativen Orientierung



Die gefährliche Konfiguration der relativen Orientierung liegt dann vor, wenn trotz guter Punktverteilung im Stereomodell es zu **singulären** und **schlecht konditionierten Normalgleichungen** kommt. Dies führt – wenn das Normalgleichungssystem überhaupt lösbar ist – zu sehr großen mittleren Fehlern für die ω'' -Unbekannte. $\text{Det}(A) \approx 0 \rightarrow$ kritischer Raum.

Gefährliche Flächen: allgemein Regelflächen 2. Grades \rightarrow Zylinder, Kegel, einschaliges Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid.

Die bekannteste gefährliche Fläche der RO ist der sog. **Gefährliche Zylinder**: Die als Verknüpfungspunkte gewählten Objektpunkte und die Projektionszentren der beiden Bilder liegen auf einem gemeinsamen Zylindermantel. Die beiden kreisförmigen Profile 1, 3, 5 und 2, 4, 6 können aber auch unterschiedliche Radien besitzen, das heißt auch **Kreiskegel**, die die beiden Aufnahmeorte O' und O'' enthalten, sind gefährliche Flächen. Die Basis muss keine Mantellinie des Kegels sein.



Nahbereichsphotogrammetrie, Luhmann, 2003

Rechnerische Bedingung für das Bestehen einer gefährlichen Fläche 2. Art:

$$(\mathbf{b}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'') = 0$$

$$\alpha_1 da_1'' + \alpha_2 da_2'' + \alpha_3 da_3'' + \beta_2 db_y + \beta_3 db_z + \alpha_0 = 0$$

Liegt eine gefährliche Fläche vor, so verschwindet die Linearform auch für veränderte Orientierungsparameter ($da_1'' + \delta a_1''$ usw.), es gilt daher

$$\alpha_1 \delta a_1'' + \alpha_2 \delta a_2'' + \alpha_3 \delta a_3'' + \beta_2 \delta b_y + \beta_3 \delta b_z = 0.$$

Fünf Orientierungspunkte führen auf fünf Gleichungen obiger Art.

Eine gefährliche Fläche liegt dann vor, wenn Lösungen für $\delta a_1''$ usw. bestehen.

Dies ist nur möglich, wenn die Determinante D der Koeffizientenmatrix der fünf Gleichungen verschwindet.

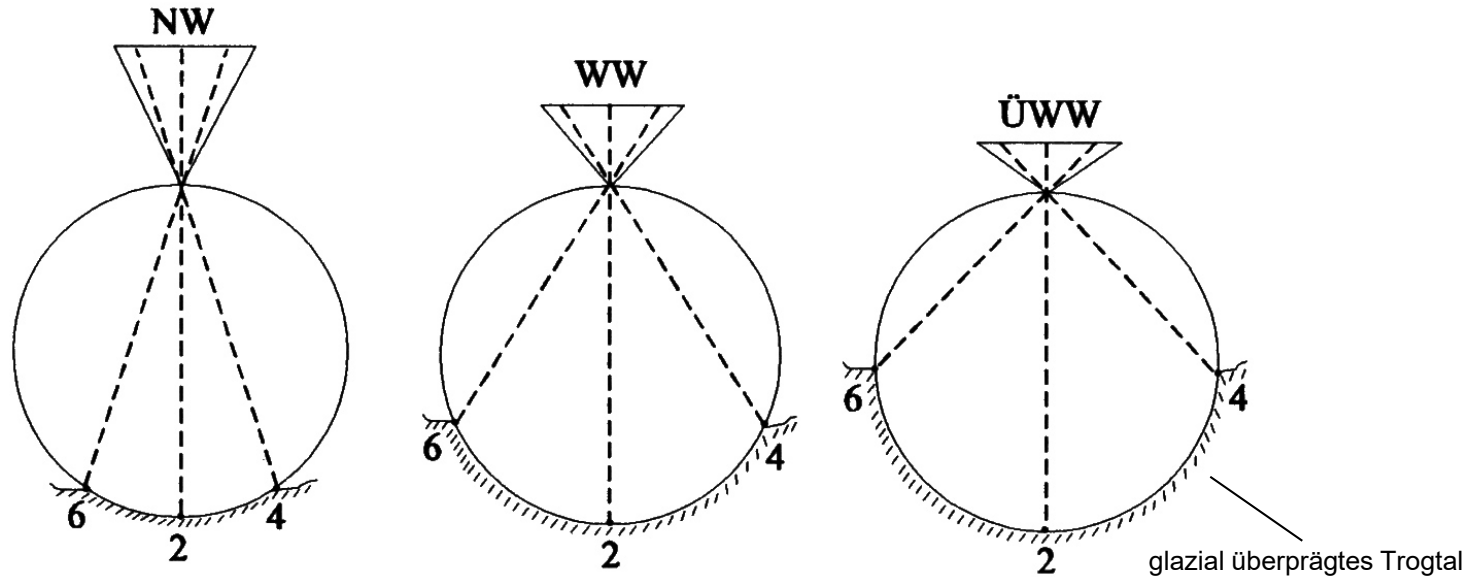
(Beweis: K. Kraus, Photogrammetrie, Band 1, 2004)



3. Zweibildorientierung

3.10 Gefährlicher Konfiguration der relativen Orientierung

Prof. G. Brandstätter hat sich mit den kritischen/gefährlichen Konfigurationen bei der Berechnung der relativen Orientierung mittels Fundamentalmatrix F befasst (On critical configurations of projective stereo correlation, IAPR 31, Part B3, Wien, 1996).



Gefährlicher Zylinder in Abhängigkeit vom Kameratyp

Abhilfe:

1. Flug mit einem anderen Kameratyp
2. Flug nicht längs, sondern quer zur Talrichtung
3. Korrektur der Orientierungselemente – insbesondere der Querneigung – über Höhenpasspunkte (vgl. Abschnitt über die Modelldeformation)
4. Berechnung einer Doppelbildeinschaltung oder einer Bündeltriangulation und Einbeziehung aller Messbilder des Bildverbandes.



3. Zweibildorientierung

3.11 Räumlicher Vorwärtsschnitt (Rekonstruktion)

Berechnung der Modell-/Objektkoordinaten durch Vorwärtsschnitt (geometrische Lösung) bzw. durch Triangulation (stochastische vs. algebraische Lösung).

① Geometrische Lösung

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}'_0 + \lambda' \mathbf{R}' \mathbf{x}'' \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}''_0 + \lambda'' \mathbf{R}'' \mathbf{x}''$$

Abstand homologer Strahlen parallel zu einer vorgegebenen Richtung:

$$\mathbf{b} = \mathbf{X}''_0 - \mathbf{X}'_0$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}' \mathbf{x}' \quad , \quad \mathbf{p}'' = \mathbf{R}'' \mathbf{x}''$$

$$\mathbf{b} + \lambda'' \mathbf{p}'' - \lambda' \mathbf{p}' - p_r \mathbf{r} = 0 \quad |\mathbf{r}| = 1$$

$$p_r = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')} = \frac{D}{(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')} = \frac{D}{N}$$

$$\lambda' = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{b}, \mathbf{p}'')}{(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')}$$

$$\lambda'' = -\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \mathbf{b})}{(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')}$$

■ $\mathbf{r} = (1 \ 0 \ 0)^T$ Richtung der X-Achse

$$p_x = \frac{D}{v'w'' - w'v''} \quad (\text{Horizontalparallaxe})$$

■ $\mathbf{r} = (0 \ 1 \ 0)^T$ Richtung der Y-Achse

$$p_y = \frac{D}{w'u'' - u'w''} \quad (\text{Vertikalparallaxe})$$

$$\lambda' = -\frac{(b_x w'' - b_z u'')}{N}$$

$$\lambda'' = \frac{(u' b_z - w' b_x)}{N}$$

⇒

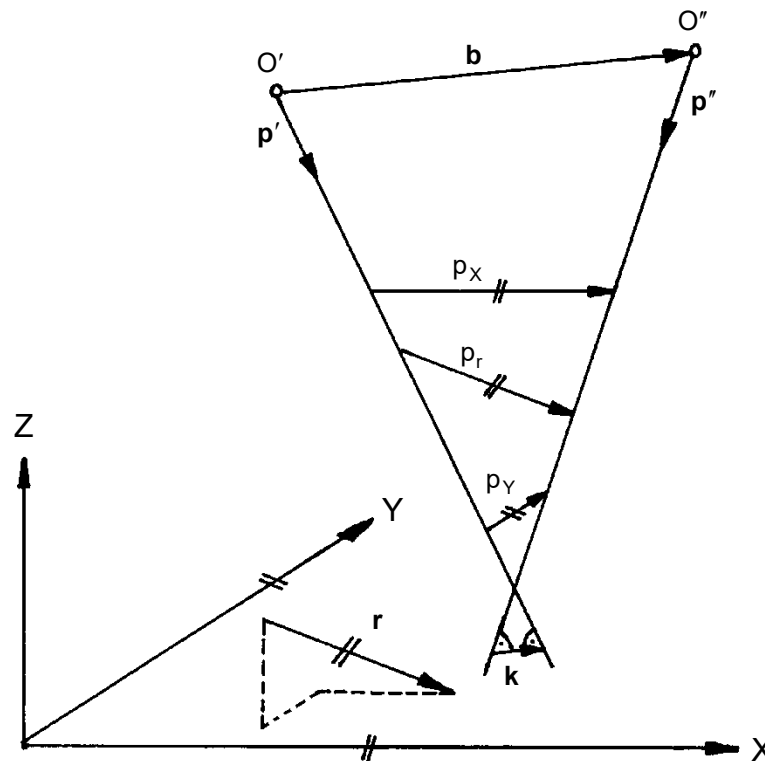
$$X' = X'' = X$$

$$Z' = Z'' = Z$$

$$Y = \frac{Y' + Y''}{2}$$

$$p_y = Y'' - Y' \quad \dots \quad Y\text{-Parallaxe (Restparallaxe)}$$

Die Lösung ist nicht streng, genügt aber in den Fällen, in denen die Basis näherungsweise in X-Richtung verläuft und b_x groß gegenüber b_y und b_z ist. Die Lösung versagt, wenn $b_x = b_z = 0$.





3. Zweibildorientierung

3.11 Räumlicher Vorwärtsschnitt (Rekonstruktion)

■ Kürzester Abstand homologer Strahlen: \mathbf{k}

\mathbf{k} steht normal auf die homologen Strahlen \mathbf{p}' und \mathbf{p}''

$$\mathbf{k} = \kappa(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') \quad (\text{Modellparallaxe})$$

$$\mathbf{b} + \lambda''\mathbf{p}'' - \lambda'\mathbf{p}' - \kappa(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') = 0 \quad | \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'')$$

$$(\mathbf{b}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \kappa(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'')^2 \Rightarrow \kappa = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'')^2}$$

$$\mathbf{k} = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'')^2} (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'')$$

$$|\mathbf{k}| = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{\sqrt{(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'')^2}} \quad \dots \text{ Betrag des kürzesten Abstandes}$$

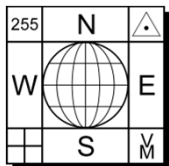
P liegt in der Mitte des kürzesten Abstandes $|\mathbf{k}|$ zwischen den beiden Raumstrahlen.

$$\lambda', \lambda'' \rightarrow X = \frac{X' + X''}{2}, \quad Y = \frac{Y' + Y''}{2}, \quad Z = \frac{Z' + Z''}{2}$$

② Triangulation (stochastische Lösung)

Der räumliche Vorwärtsschnitt lässt sich auch als überbestimmtes Ausgleichsproblem auf der Basis der Kollinearitätsgleichungen formulieren und damit auf mehr als zwei Bilder erweitern.

gegeben: IO, RO bzw. EO ; gemessen: x_i, y_i ; gesucht: X, Y, Z \rightarrow Bündeltriangulation



3. Zweibildorientierung

3.11 Räumlicher Vorwärtsschnitt (Rekonstruktion)

© Direkte algebraische Lösung (*linear triangulation*)

► Homogene Lösung:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{X} \quad | \times \mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}_i \mathbf{X} = \mathbf{w}_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad N \dots \text{Anzahl der Bilder}$$

$$\underbrace{\mathbf{S}_{\mathbf{x}_i} \mathbf{P}_i}_{\mathbf{A}_i} \mathbf{X} = \mathbf{w}_i = 0 \quad (\text{3. Zeile ist zufolge Rangdefekt von } \mathbf{S} \text{ von 1.Z. und 2.Z. linear abhängig.})$$

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{w} = 0$$

$\mathbf{A}_i \dots 2 \times 4 \text{ - Matrix}$
 $\mathbf{A} \dots 2N \times 4 \text{ - Matrix}$
 $\mathbf{w} \dots 2N \times 1 \text{ - Matrix}$

Lösung des homogenen Gleichungssystems durch Minimierung des algebraischen Fehlers $\mathbf{w}^T \mathbf{w}$ durch SVD \Rightarrow Lösungsvektor ist der rechte Eigenvektor von \mathbf{A} , welcher zum kleinsten Eigenwert gehört.

► Inhomogene Lösung mit $(x_i, y_i, 1)^T$ und $(X, Y, Z, 1)^T$:

Ansatz wie vorhin.

Berechnung von (X, Y, Z) durch (quasivermittelnden) Ausgleich. Vgl. (inhomogene) Lösung der DLT!

Diese Vorgangsweise versagt, falls die homogene Komponente Null oder nahe Null ist.

(Lösung liegt dann im Unendlichen!)



3. Zweibildorientierung

3.12 Genauigkeitsanalyse

Erfolgt die Berechnung der relativen Orientierung nach der Kleinsten-Quadrate-Methode, so kann am Ende auch eine Schätzung der mittleren Fehler der jeweils berechneten Orientierungselemente angegeben werden:

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_l \mathbf{A})^{-1}}_{\mathbf{Q}_{xx}} \hat{\sigma}_0^2$$

\mathbf{Q}_{xx} ... Parameter - Kovarianzmatrix

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_l \mathbf{v}}{n - m}} \quad \dots \text{Schätzung für die Standardabweichung (= Gewichtseinheitsfehler)}$$

$m = 5$... Korrelationsmatrix, Essentielle Matrix
 $m = 7(8)$... Fundamentalmatrix

Durch Anwenden des Fehlerfortpflanzungsgesetzes lässt sich die Kovarianzmatrix \mathbf{Q}_{xx} für jeden rekonstruierten Modellpunkt schätzen. Bei der Rekonstruktion wird vorerst von fehlerfreien Bildkoordinatenmessungen ausgegangen.

Standardfall: Photogrammetrischer Normalfall, ebenes Gelände, 5(6) Schemapunkte (Gruber-Punkte)
 Mathematisches Modell: Parallaxengleichung für den Normalfall

$$\sigma_{\hat{p}_Y}^2 = \mathbf{a} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{a}^T \hat{\sigma}_0^2 = \mathbf{Q}_{p_Y p_Y} \hat{\sigma}_0^2$$

$\sigma_{\hat{p}_Y}$... mittlerer Parallaxenfehler eines Modellpunktes nach der RO

$$\sigma_{\hat{p}_Y} = \sqrt{\mathbf{Q}_{p_Y p_Y}} \hat{\sigma}_0$$

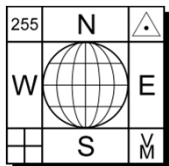
\mathbf{a} ... Differentialquotienten (siehe Parallaxengleichung)

Graphische Darstellung siehe nächste Seite.

- Ergebnis: ▶ mittlerer Fehler der Restparallaxe < Parallaxenmessgenauigkeit σ_0
 ▶ RO mit 6 Punkten verbessert die Genauigkeit bis auf 0.6 σ_0 .
 ▶ Eine große Überbestimmung verbessert das Ergebnis nicht wesentlich, jedoch steigt die innere und äußere Zuverlässigkeit. Vgl. Abschnitt 3.13.
 ▶ Zufällige Fehler der RO wirken sich systematisch aus.

Da die Objektkoordinaten der Neupunkte eigentlich aus gemessenen Bildkoordinaten abgeleitet werden, sind auch die Fehleranteile der Bildkoordinaten durch Fehlerfortpflanzung zu berücksichtigen.

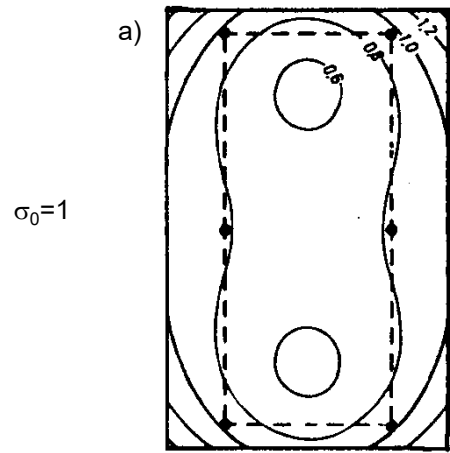
Projective geometry: Uncertainty of geometric parameters and homogeneous vectors → Spezialliteratur (Prof. W. Förstner).



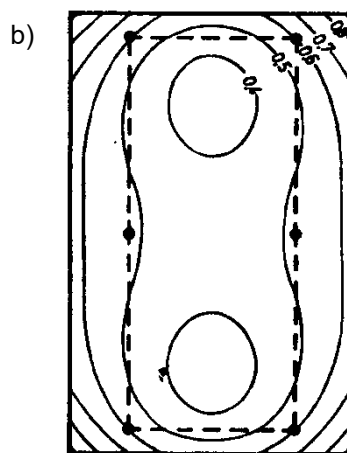
3. Zweibildorientierung

3.12 Genauigkeitsanalyse

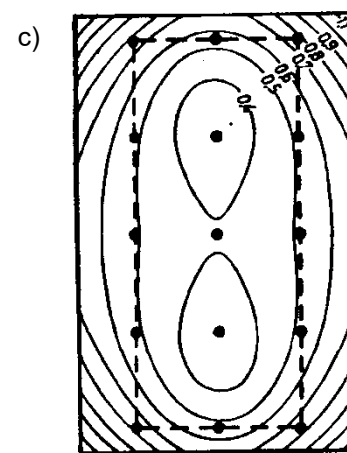
Graphische Darstellung der mittleren Restparallaxen:



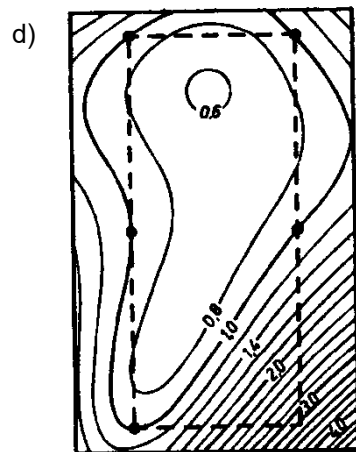
6 Orientierungspunkte



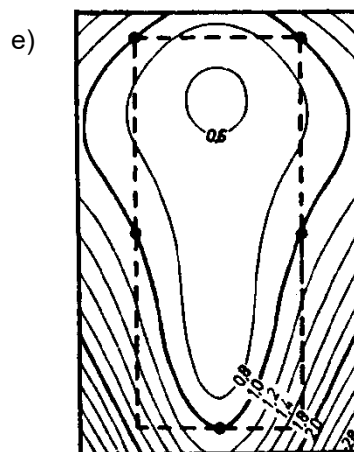
Wie a, jedoch mit Gewicht 2.5 für die Parallaxenmessfehler.



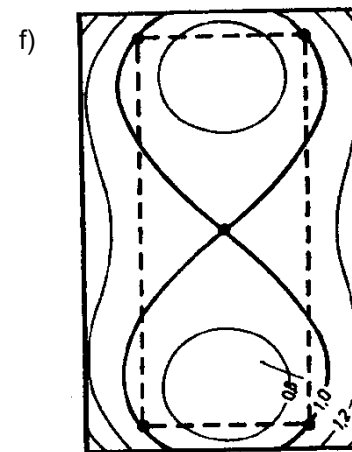
Wie a, jedoch mit 15 Orientierungspunkten.



Wie a, jedoch mit 5 Orientierungspunkten.



Wie a, jedoch mit 5 Orientierungspunkten.



Wie a, jedoch mit 5 Orientierungspunkten.



3. Zweibildorientierung

3.13 Modelldeformation

Restfehler in der gegenseitigen Orientierung verursachen **systematische** Abweichungen der Modellpunkte von der Soll-Lage. Orientierungsfehler können aber auch durch systematische Fehlereinflüsse, wie z.B. Refraktion, Objektivverzeichnung, Filmverzug, etc., entstehen. (→ vgl. dazu die Modellierung von systematischen Fehlern durch zusätzliche Parameter bei der Bündelblockausgleichung)
 Die Modellpunkte werden durch räumlichen Vorwärtsschnitt bestimmt. Aus dem Vergleich von Soll- und Ist-Lage lässt sich das Ausmaß der Modelldeformation (-verbiegung) für die einzelnen Einflussgrößen (= Elemente der RO) theoretisch/numerisch berechnen.

Die Modelldeformationen in der Höhe sind im allgemeinen größer als die Deformation in der Lage (X,Y).

Ableitung der Modelldeformationen für die Z-Komponente für den photogrammetrischen Normalfall und ebenes Gelände:

$$h = -Z = \frac{cb}{p_x} \quad (\text{vgl. Grundlagenvorlesung Photogrammetrie})$$

$$dh = -\frac{cb}{p_x^2} dp_x = -\frac{h^2}{cb} dp_x = -\frac{h}{b} dp_x \quad \frac{h}{c} dp_x = dp_x$$

dZ ... Höhenänderung

$$dX = dX_0 + \frac{X}{h} dZ_0 + \frac{XY}{h} d\omega - h\left(1 + \frac{X^2}{h^2}\right) d\varphi - Y d\kappa$$

dX ... differentielle Änderung der Objektkoordinate X
 $dX = dX(dX_0, dY_0, dZ_0, d\varphi, d\omega, d\kappa)$

$$dh = -\frac{h}{b} (dX' - dX'')$$

$$dh = -\frac{h}{b} \left(dX'_0 + \frac{X}{h} dZ'_0 + \frac{XY}{h} d\omega' - h\left(1 + \frac{X^2}{h^2}\right) d\varphi' - Y d\kappa' - \right. \\ \left. - dX''_0 - \frac{X-b}{h} dZ''_0 - \frac{(X-b)Y}{h} d\omega'' + h\left(1 + \frac{(X-b)^2}{h^2}\right) d\varphi'' - Y d\kappa'' \right)$$

$$dh = -\frac{h}{b} Y d\kappa' + \frac{h}{b} Y d\kappa'' - \\ -\frac{h^2 + X^2}{b} d\varphi' + \frac{h^2 + (X-b)^2}{b} d\varphi'' - \\ -\frac{XY}{b} d\omega' - \frac{(X-b)Y}{b} d\omega'' + \\ + \frac{X}{b} dZ'_0 - \frac{(X-b)}{b} dZ''_0 - \\ -\frac{h}{b} dX'_0 + \frac{h}{b} dX''_0$$

Die konstanten und linearen Einflüsse werden bei der absoluten Orientierung kompensiert. Letztendlich verfälschen nur die tatsächlichen Verbiegungen (quadratische und hyperbolische Anteile) die Höhenmessung.

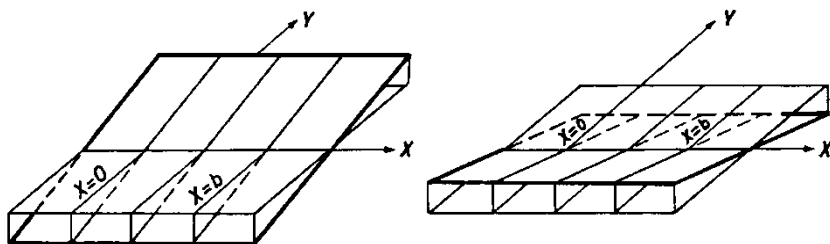


3. Zweibildorientierung

3.13 Modelldeformation

Verbiegung einer horizontalen Ebene zufolge:

Verkanntung κ



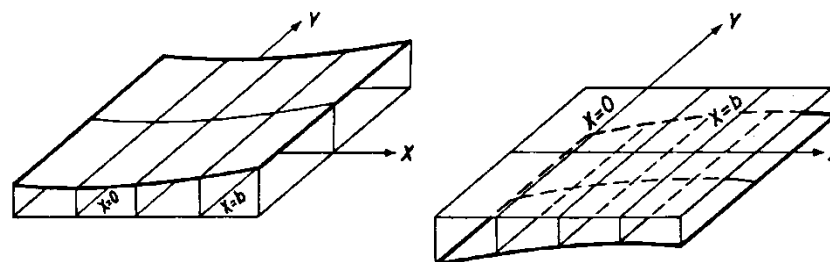
$$dh = -\frac{h}{b} Y d\kappa'$$

linke Aufnahme

$$dh = \frac{h}{b} Y d\kappa''$$

rechte Aufnahme

Längsneigung φ



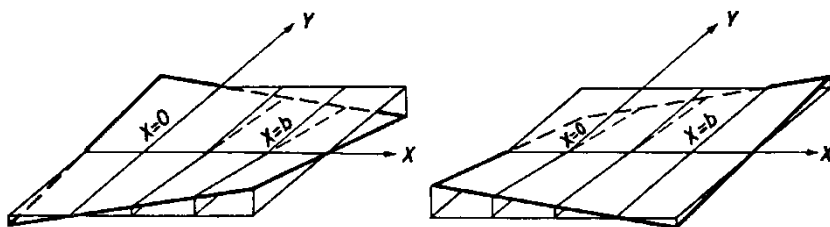
$$dh = \frac{h^2 + X^2}{b} d\varphi'$$

linke Aufnahme

$$dh = -\frac{h^2 + (X-b)^2}{b} d\varphi''$$

rechte Aufnahme

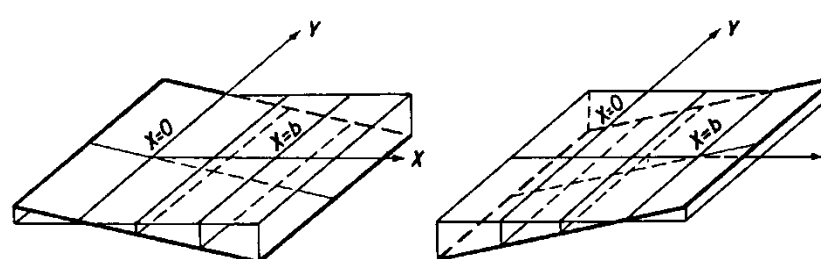
Querneigung ω



$$dh = \frac{XY}{b} d\omega'$$

$$dh = \frac{(X-b)Y}{b} d\omega''$$

Änderung von b_z



$$dh = -\frac{X}{b} dZ'_0$$

$$dh = \frac{(X-b)}{b} dZ''_0$$



3. Zweibildorientierung

3.14 Innere und äußere Zuverlässigkeit

Die Beurteilung der Zuverlässigkeit erfolgt über die Kovarianzmatrix der Verbesserungen.

$$\mathbf{P}_{ll} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \Rightarrow \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{P}_{ll} = \mathbf{E} \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{ll} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{ll} \mathbf{l}$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{ll} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{ll} - \mathbf{E}) \mathbf{l}$$

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{ll} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \quad \dots \text{Kovarianzmatrix der Verbesserungen}$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{ll} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{ll} - \mathbf{E}) \mathbf{l} \xrightarrow{(1)} (\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{ll} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{Q}_{ll}) \mathbf{P}_{ll} \mathbf{l} = (\mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T - \mathbf{Q}_{ll}) \mathbf{P}_{ll} \mathbf{l} = -\mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P}_{ll} \mathbf{l}$$

$$\mathbf{v} = \underbrace{-\mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P}_{ll} \mathbf{l}}_{\mathbf{R}}$$

$\mathbf{R} \dots$ Redundanzmatrix

Die Hauptdiagonalglieder der \mathbf{Q}_{vv} -Matrix sind für die Kontrollierbarkeit der einzelnen Beobachtungen verantwortlich. Je größer die Hauptdiagonalelemente der \mathbf{Q}_{vv} -Matrix sind, desto mehr entsprechen die Verbesserungen den groben Beobachtungsfehlern und desto zuverlässiger lassen sich die groben Datenfehler finden.

Da die aktuellen Beobachtungen \mathbf{l} nicht in die \mathbf{Q}_{vv} -Matrix eingehen, kann sie deshalb bereits vor der eigentlichen Messung berechnet werden. → Planungsmöglichkeit; → Optimierungsmöglichkeit:

- ▶ Die Elemente auf der Hauptdiagonalen sollen möglichst groß sein und untereinander möglichst wenig differieren.
- ▶ Die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen (= Korrelationen zwischen den Verbesserungen) sollen möglichst klein sein.

$$r = n - u = \text{spur}(\mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P}_{ll}) = r = \sum r_i$$

Man bezeichnet r_i als Redundanzanteil einer Beobachtung l_i an der Gesamtredundanz r mit $0 \leq r_i \leq 1$.

Der Redundanzanteil einer Beobachtung beschreibt, welcher relativer Anteil der Beobachtungen "überschüssig" ist (r_i) und welcher Anteil zur Berechnung der Unbekannten genutzt wird ($1 - r_i$). Kleine Redundanzanteile entsprechen einer schwachen, schlecht kontrollierbaren Überbestimmung, hohe Redundanzanteile sprechen für gute Kontrollierbarkeit der Beobachtungen. Hat eine Beobachtung den Redundanzanteil von $r_i=0$, wird sie nicht durch andere Beobachtungen kontrolliert, d.h. ein grober Fehler dieser Beobachtung ist nicht aufdeckbar, geht aber voll in die Bestimmung der Unbekannten ein. Besitzt eine Beobachtung einen sehr hohen Redundanzanteil (0.8 bis 1), ist sie sehr gut durch andere Beobachtungen kontrolliert und könnte im Rahmen einer Optimierung am ehesten weggelassen werden, ohne dass sich das Ausgleichsergebnis nennenswert ändern würde.



3. Zweibildorientierung

3.14 Innere und äußere Zuverlässigkeit

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l} = -\mathbf{Rl} \Rightarrow \Delta \mathbf{v} = -\mathbf{R}\Delta \mathbf{l} \quad \Delta \mathbf{l} \dots \text{(nicht zufällige) grobe Messfehler}$$

$$\sigma_{l_i} = \sqrt{(\mathbf{Q}_{ll})_{ii}} \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{(p_{ll})_{ii}}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{p_i}}$$

σ_0 ... Gewichtseinheitsfehler

p_i ... Gewicht der Beobachtung l_i (Beobachtungen sind unkorreliert)

σ_{l_i} ... mittlere Fehler der Beobachtung l_i

$$\sigma_{v_i} = \sqrt{(\mathbf{Q}_{vv})_{ii}} \sigma_0 = \sqrt{(\mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P}_{ll})_{ii} (\mathbf{P}_{ll})_{ii}^{-1}} \sigma_0 = \sqrt{(\mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P}_{ll})_{ii}} \sigma_{l_i} = \sqrt{r_i} \sigma_{l_i}$$

Sind die unregelmäßigen Fehler der Beobachtungen normalverteilt, dann sind auch die Verbesserungen normalverteilt mit dem Erwartungswert $E(v_i)=0$ und mit σ_{v_i} als Standardabweichung.

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sqrt{r_i} \sigma_{l_i}} = \frac{v_i \sqrt{p_i}}{\sigma_0 \sqrt{r_i}} \quad \dots \text{normierte Verbesserungen}$$

\bar{v}_i sind normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der Standardabweichung ± 1 .

Fehlersuche mit den normierten Verbesserungen:

Da sich grobe und zufällige Fehler in der Praxis aber überlagern, kann der grobe Fehler mit den normierten Verbesserungen \bar{v}_i nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aufgedeckt werden.

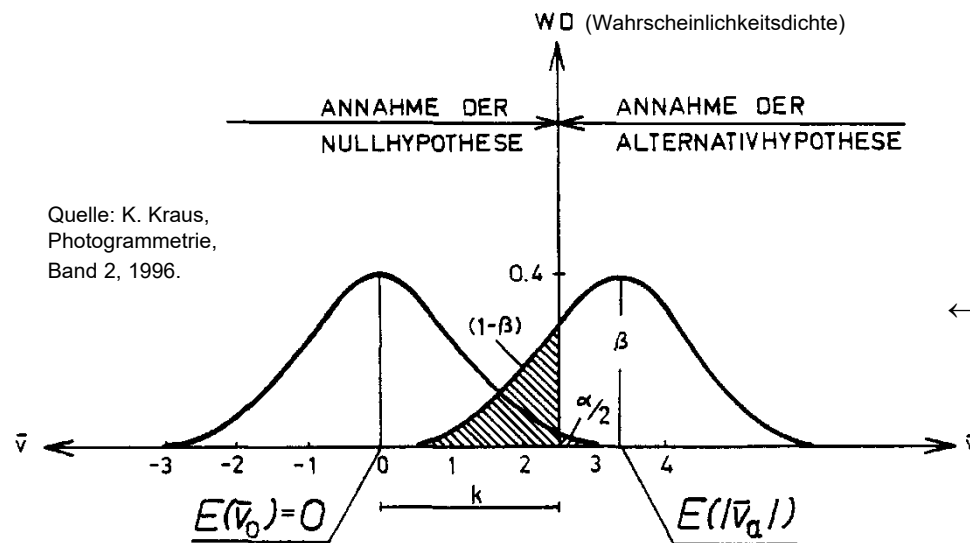
$$\text{Schwellwert } k \quad \left| \bar{v}_i \right| \begin{cases} > k : \text{grober Fehler} \\ \leq k : \text{kein grober Fehler} \end{cases}$$

Zur Festlegung von k wird ein statistischer Test herangezogen, in dem die Größe δ_0 (Nichtzentralitätsparameter, *non-centrality parameter*) = $E(|\bar{v}_a|_{zu v})$ definiert wird.



3. Zweibildorientierung

3.14 Innere und äußere Zuverlässigkeit



Quelle: K. Kraus, Photogrammetrie, Band 2, 1996.

← Wahrscheinlichkeitsdichte für die Nullhypothese und die Alternativhypothese bei einem Test zum Aufdecken eines groben Beobachtungsfehlers (α = Fehleranteil 1. Art, $(1-\beta)$ = Fehleranteil 2. Art)

Nullhypothese: $E(\bar{v}_0) = 0$ (\bar{v} ... nur zufällige Fehler und keine groben Beobachtungsfehler)

Eliminiert man Beobachtungen, die keine groben Fehler enthalten, aufgrund der normierten Verbesserungen $|\bar{v}| > k$, so trifft man eine Fehlentscheidung (= **Fehler 1. Art**).

Ein Maß für die Fehler 1. Art ist die sogenannte **Signifikanzzahl** α .

Beispiel: $k=2.5 \Rightarrow \alpha=1\%$

Alternativhypothese: $E(\bar{v}_a) \neq 0$ (l_a ... eine grob fehlerhafte Beobachtung im Datenmaterial)

Wird nun die Alternativhypothese angenommen, dass nur Beobachtungen mit $|\bar{v}| > k$ als grobe Fehler ausgeschlossen werden, verbleibt eine mögliche Zahl grober Abweichungen im Datensatz.

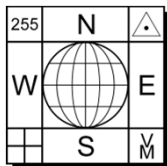
Die Wahrscheinlichkeit für diese Fehlentscheidung (= **Fehler 2. Art**) beträgt $1-\beta$.

β ... **Macht des Tests**

Die Macht des Tests wäre in folgenden Fällen besser:

- ▶ Verkleinerung der Toleranz k
- ▶ Genauere Messung der Beobachtungen
- ▶ Größerer grober Beobachtungsfehler
- ▶ Verbesserung der Geometrie (zusätzliche Beobachtungen, opt. Anordnung der n Beobacht.)

$$r_{i,optimal} = r/n \rightarrow$$



3. Zweibildorientierung

3.14 Innere und äußere Zuverlässigkeit

$E(|\bar{v}_a|)_{zuv}$ ist ein unterer Erwartungswert für einen groben Datenfehler, der mit der Macht des Tests β noch signifikant nachweisbar ist.

Innere und äußere Zuverlässigkeit (*inner and outer reliability*):

$$E(|v_a|)_{zuv} = E(|\bar{v}_a|)_{zuv} \sqrt{r_i} \sigma_i$$

$$E(|\Delta l_a|)_{zuv} = \frac{E(|\bar{v}_a|)_{zuv}}{\sqrt{r_i}} \sigma_i$$

$E(|\Delta l_a|)_{zuv}$ gibt an, wie groß der Beobachtungsfehler Δl sein muss, damit er beim Test mit den normierten Verbesserungen mit der Wahrscheinlichkeit von β gefunden wird.

$E(|\Delta l_a|)_{zuv}$ ist ein Maß für die **innere Zuverlässigkeit (IZ)**

	$\alpha=5\%$ $\beta=75\%$	$\alpha=1\%$ $\beta=93\%$	$\alpha=0.1\%$ $\beta=80\%$
k	1.96	2.56	3.29
$\delta_0 = E(\bar{v}_a)_{zuv}$	3.9	4.0	4.1

Testgröße und unterer Erwartungswert für einen groben Datenfehler bei verschiedener Signifikanzzahl und Macht des Test.

Quelle: Th. Luhmann, Nahbereichsphotogrammetrie, 2003

Nach Prof. K. Kraus hat sich in der Praxis ein Wert von $E(|\bar{v}_a|)_{zuv} = 4.0$ bewährt. ($\rightarrow k=2.56$, 1% Fehlentscheidung 1. Art, 7% Fehlent. 2. Art) J. Kruck empfiehlt für das Programmsystem BINGO für k einen Wert zwischen 3.0 und 3.3 zu wählen.

Die **äußere Zuverlässigkeit (AZ)** $E(|\Delta x_a|)_{zuv}$ bestimmt den Einfluss einer fehlerhaften Beobachtung auf die zu bestimmenden Unbekannten. Für eine umfassende Ermittlung der äußeren Zuverlässigkeit muss man zu jeder der n Beobachtungen mit ihrer inneren Zuverlässigkeit die Auswirkungen auf die Unbekannten berechnen und dann für jede Unbekannte aus den n Werten den betragsmäßig größten Wert auswählen.

$$\Delta \mathbf{x}_a^u = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_i \Delta l_a^i$$

$$\Delta l_a = (0, 0, \dots, \Delta l_a, \dots, 0, 0)^T$$

$$\frac{|\Delta \mathbf{x}_a^u|_{\max}}{\sqrt{(Q_{xx})_{ii}} \sigma_0} \leq 3$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$u = 1, \dots, u$$

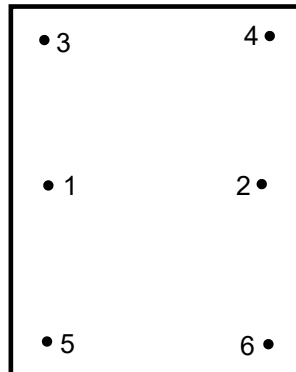
In der Praxis sollte die AZ nicht größer sein als der 3fache Fehler der jeweiligen Unbekannten.



3. Zweibildorientierung

3.14 Innere und äußere Zuverlässigkeit

Beispiel: Relative Orientierung mit sechs Punkten



$$Q_{vv} = \begin{pmatrix} 0.33 & -0.33 & -0.17 & 0.17 & -0.17 & 0.17 \\ & 0.33 & 0.17 & -0.17 & 0.17 & -0.17 \\ & & 0.08 & -0.08 & 0.08 & -0.08 \\ & & & 0.08 & -0.08 & 0.08 \\ & & & & 0.08 & -0.08 \\ \text{symm.} & & & & & 0.08 \end{pmatrix}$$

6 Gruber-Punkte

$P_{ii} = E$; gleich genaue Parallaxenmessungen p_y

Diskussion:

► $\sum r_i = 1$ (Redundanz = 6-5 = 1)

- Die Verbesserungen sind miteinander sehr stark korreliert.
- Die Absorption eines groben Parallaxenfehlers in den Punkten 3, 4, 5 und 6 beträgt 92%.
- Die innere Zuverlässigkeit beträgt in diesen Punkten (mit $E(|\bar{v}_a|)_{ZUV} = 4.0$) nur

$$IZ = 4\sigma_{p_y} / \sqrt{0.08} = 14\sigma_{p_y}.$$

- Bei der Suche nach groben Fehlern mit den normierten Verbesserungen \bar{v} bleiben demnach Parallaxenfehler, die 14-mal größer als der mittlere Parallaxenmessfehler sind, unentdeckt.
- Die äußere Zuverlässigkeit ist dementsprechend schlecht!

Durch Erhöhen der Anzahl der Orientierungspunkte, wie z.B. je zwei Schema-Punkte in den Modellecken, kann eine wesentlich bessere Zuverlässigkeit erzielt werden.



3. Zweibildorientierung

3.15 Erkennen von Ausreißern (Datenfehlern)

Grobe Datenfehler: ■ große grobe Fehler (grobe Fehlmessungen, falsche Punktidentifizierungen, etc.)
■ kleine grobe Fehler

3.15.1 Fehlersuche ohne Ausgleichung

Bei nicht konvergenten Ausgleichssystemen kann es sinnvoll sein, allein die Verträglichkeit der Messwerte mit ihren Näherungswerten ohne Ausgleich zu überprüfen.

$$\mathbf{v} = \mathbf{l} - \mathbf{l}_0$$

Anmerkung: Eine grobe Diskrepanz \mathbf{v} kann aber auch durch schlechte Näherungswerte entstehen.

3.15.2 Fehlersuche anhand der Verbesserungen

Ist die Konvergenz erreicht, so kann eine Fehlersuche anhand der Verbesserungen \mathbf{v} der Beobachtungen vorgenommen werden.

$$\frac{v_i}{\sigma_i} \cdot \frac{\sigma_{0\text{apriori}}}{\sigma_{0\text{aposteriori}}} - 1 \quad \dots \quad \text{Bewertung jeder Beobachtung (vgl. BINGO)}$$

Detektion der größten, gut aufdeckbaren Fehler durch Vergleich mit Schranke $v_i > 4\sigma_i$.
Danach folgt *Data Snooping*.

3.15.3 Data Snooping nach Baarda

Grundlage: innere Zuverlässigkeit (siehe vorheriger Abschnitt).

Annahme: Es ist nur ein einziger Fehler in den Beobachtungen enthalten.

Ablauf: Nach jedem Durchgang einer Ausgleichung wird aufgrund eines statistischen Tests (siehe vorhin) die Beobachtung der größten normierten Verbesserung $|\bar{v}_i|_{\max}$ eliminiert. Das gesamte Gleichungssystem wird dann erneut aufgestellt und gerechnet, bis keine groben Fehler mehr enthalten sind.

Anmerkung: Es können auch mehrere grobe Fehler gleichzeitig detektiert werden, falls zwischen den entsprechenden Verbesserungen zufolge der Netzgeometrie keine Korrelationen bestehen.
→ Spezialliteratur für die Detektion mehrerer grober Datenfehler bzw. für die Behandlung von stark korrelierten Beobachtungen.



3. Zweibildorientierung

3.15 Erkennen von Ausreißern (Datenfehlern)

3.15.4 Varianzkomponentenschätzung

Bei verschiedenen genauen Beobachtungsgruppen ist eine Schätzung der Varianzen σ_k^2 für die einzelnen Beobachtungsgruppen sinnvoll, um daraus verbesserte Gewichte p_i a posteriori ableiten zu können.

$$p_{k,a\text{-posteriori}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_k^2} = \sigma_0^2 \frac{\sum_{i=1}^{n_k} r_i}{\sum_{i=1}^{n_k} (v_i^2 p_{i,a\text{-priori}})}$$

1. $\mathbf{P}_{\parallel} = \mathbf{Q}_{\parallel} = \mathbf{E} \rightarrow$ Ausgleich
2. Berechnung von $\mathbf{R} = -\mathbf{Q}_{vv}\mathbf{P}_{\parallel} \Rightarrow r_i$
3. $\Rightarrow \sigma_k \Rightarrow p_{k,a\text{-posteriori}}$
4. Iteration bis $\frac{\sigma_{k,a\text{-priori}}}{\sigma_{k,a\text{-posteriori}}} \rightarrow 1$

3.15.5 Robuste Schätzung

- ❑ Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate verschmiert die groben Beobachtungsfehler und verfälscht im beachtlichen Ausmaß das Ausgleichsergebnis.
- ❑ Aufwand für das Data Snooping ist beträchtlich.
- ❑ Probleme bei verhältnismäßig vielen groben Fehlern

Alternativen:

► **RANSAC-Algorithmus** (für spezielle funktionale Modelle $x_i \leftrightarrow X_i$)

► **Robuste Schätzung nach der L1-Norm:**

Die L1-Norm basiert auf der Minimierung der Absolutwerte der Verbesserungen.

$$\text{L1-Norm: } \sum_{i=1}^n |v_i| \rightarrow \text{Min. (vgl. dazu L2-Norm: } \sum_{i=1}^n v_i^2 \rightarrow \text{Min.)}$$



3. Zweibildorientierung

3.15 Erkennen von Ausreißern (Datenfehlern)

Die Ausgleichung nach der L1-Norm ist rechentechnisch aufwendiger als nach der L2-Norm → Spezialliteratur.
 Theoretisch können mit der L1-Norm bis zu 50% grober Fehler im Datensatz enthalten sein, da die Lösung durch den Medianwert bestimmt ist.
 Nach der Bereinigung des Datensatzes durch eine Ausgleichung nach der L1-Norm sollte abschließend eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten durchgeführt werden.

► **Adaption der Kleinste-Quadrate-Ausgleichung durch Gewichtsfunktionen:**

Es existieren verschiedene Ansätze, die Gewichte p_i der nächsten Iteration einer Ausgleichung mit Hilfe einer Funktion der Verbesserungen v_i zu bestimmen. Die Funktion soll so gestaltet sein, dass der Einfluss eines groben Fehlers mit zunehmender Größe des Fehlers zu Null wird.

Möglichkeiten der Gewichtswahl: • $p_i = \frac{1}{|v_i|}$ (bei $v_i = 0 \Rightarrow p_i \rightarrow \infty$)

• Dänische Methode

$$p_i = e^{-0.05 r^\alpha}, \quad r = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0} \quad \text{Z/I Imaging, ISDM Manual}$$

α ... Gewichtsfunktion zw. 3 und 4.4

$\hat{\sigma}_0$... Gewichtseinheitsfehler der vorangegangenen Iteration

• Funktion nach Klein

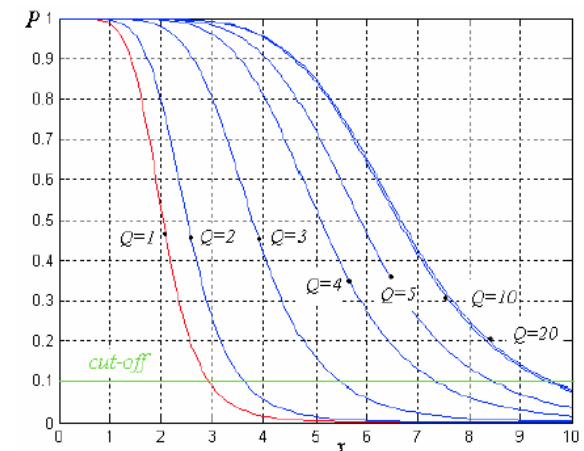
$$p'_i = p_i \frac{1}{1 + (a|v_i|)^b} \quad \text{mit}$$

$$a_i = \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{r_i} \hat{\sigma}_0 k} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{v_i} k}$$

b, k ... Parameter

• Funktion nach Werner
 (Z/I Imaging, ISDM Manual)

$$p(v_i) = \frac{1}{1 + (\alpha \cdot x_i)^{6.0}}; \quad \alpha = \frac{0.35}{1 + (0.4 \cdot Q)^{4.0}} + 0.15; \quad Q = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_{a-priori}}; \quad x_i = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0}$$





3. Zweibildorientierung

3.16 Absolute Orientierung

- ① Kalibrierte Kamera: ähnliches Modell → 3D-Ähnlichkeitstransformation (7 Parameter)
- ② Nicht-kalibrierte Kamera: projektiv verzerrtes Modell → 3D-Homographie (15 Parameter)

ad ①

Nach der gegenseitigen Orientierung ist ein ähnliches Modell des Objektes vorhanden. Durch die absolute Orientierung wird dieses beliebig im Raum liegende Model in das übergeordnete Objektkoordinatensystem transformiert. Der mathematische Zusammenhang ist durch eine **räumliche Drehstreckung** gegeben:

$$\mathbf{U} = \mu \mathbf{R} \mathbf{X} + \mathbf{U}_0$$

\mathbf{X} ... Modellkoordinaten

\mathbf{U} ... Objektkoordinaten

\mathbf{U}_0 ... Translation (3 U)

\mathbf{R} ... Rotation (3 U)

μ ... Maßstab (1 U)

} 7 Parameter → Diese bestimmt man aus Passpunkten, also aus Punkten, deren Modell- und Objektkoordinaten bekannt sind.
Es können jedoch auch geodätische Messgrößen (Strecken, etc.) verwendet werden.

Für die absolute absolute Orientierung gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten:

1. Iterative Kleinste-Quadrate-Ausgleichung ($N \geq 3$ Passpunkte)
2. Zweistufige Lösung
3. Direkte Kleinste-Quadrate-Schätzung (*direct LS-estimation*)
4. Näherungslösung mit 3 Passpunkten

ad ②

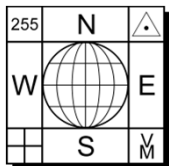
$$\lambda \mathbf{U} = \mathbf{H} \mathbf{X}$$

$\mathbf{H}_{4 \times 4}$... homogene Matrix (mit 15 Freiheitsgraden)

$\mathbf{U}_{4 \times 1}$... homogener Vektor (mit Objektkoordinaten)

$\mathbf{X}_{4 \times 1}$... homogener Vektor (mit Modellkoordinaten)

→ projektive Transformation



3. Zweibildorientierung

3.16 Absolute Orientierung

3.16.1 Iterative Kleinste-Quadrate-Ausgleichung

Lösung geht von guten **Näherungswerten** für die 7 Unbekannten der absoluten Orientierung aus:

$$(\Omega), (\Phi), (K) \rightarrow (\mathbf{R}) \quad \Omega, \Phi \text{ und } K \text{ kommen in } \mathbf{R} \text{ in nichtlinearer Form}$$

$$(\mu), \text{ wobei } \mu = (\mu)(1 + d\mu) \quad (\text{transzendente Funktionen!}) \text{ vor.}$$

$$(\mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_0) + d\mathbf{U}_0 + (\mu)(1 + d\mu)d\mathbf{R}(\mathbf{R})\mathbf{X}$$

$$d\mathbf{R} = \mathbf{E} + d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_0) + d\mathbf{U}_0 + (\mu)(1 + d\mu)(\mathbf{E} + d\mathbf{A})(\mathbf{R})\mathbf{X}$$

$$(\mathbf{U}) = (\mathbf{U}_0) + (\mu)(\mathbf{R})\mathbf{X}$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_0) + d\mathbf{U}_0 + (\mu)d\mu(\mathbf{R})\mathbf{X} + (\mu)d\mathbf{A}(\mathbf{R})\mathbf{X}$$

$$(\mu)(\mathbf{R})\mathbf{X} = (\mathbf{U}) - (\mathbf{U}_0) = (\Delta\mathbf{U}) \quad \dots \text{ genäherte Koordinatendifferenzen im Objektkoordinatensystem}$$

$$d\mathbf{U} = \mathbf{U} - (\mathbf{U}) = (\Delta\mathbf{U})d\mu + d\mathbf{A}(\Delta\mathbf{U}) + d\mathbf{U}_0$$

$$d\mathbf{A}\Delta\mathbf{U} = -\mathbf{S}_{\Delta\mathbf{U}}d\mathbf{a}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -dK & d\Phi \\ dK & 0 & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{U} \\ \Delta\mathbf{V} \\ \Delta\mathbf{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta\mathbf{W} & -\Delta\mathbf{V} \\ -\Delta\mathbf{W} & 0 & \Delta\mathbf{U} \\ \Delta\mathbf{V} & -\Delta\mathbf{U} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\Omega \\ d\Phi \\ dK \end{pmatrix}$$

Klammern bei $\Delta\mathbf{U}$ weglassen.

$$\Rightarrow d\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta\mathbf{U} & 0 & \Delta\mathbf{W} & -\Delta\mathbf{V} \\ 0 & 1 & 0 & \Delta\mathbf{V} & -\Delta\mathbf{W} & 0 & \Delta\mathbf{U} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta\mathbf{W} & \Delta\mathbf{V} & -\Delta\mathbf{U} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{U}_0 \\ d\mathbf{V}_0 \\ d\mathbf{W}_0 \\ d\mu \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \end{pmatrix} = \mathbf{G}d\mathbf{t}$$



3. Zweibildorientierung

3.16 Absolute Orientierung



cont.

Für die Berechnung der 7 Unbekannten in dt sind sieben unabhängige Koordinatenwidersprüche $I = U - (U)$ notwendig, also z.B. zwei volle Raumpasspunkte und eine Koordinate eines weiteren Punktes. Die 3 Punkte dürfen nicht kollinear sein.

$$G_i dt = I_i$$

Bei Überbestimmung $\rightarrow v_i = G dt - I_i \quad I_i \dots$ Klaffen

$$dt = (G^T G)^{-1} G^T I_i$$

$$U_0 = (U_0) + dU_0$$

$$\mu = (\mu)(1 + d\mu)$$

$$R = dR(R) \quad dR \dots$$
 orthonormieren!

Weitere Iterationen bis Abbruchskriterium erfüllt ist.

Durch Übergang auf Schwerpunktskoordinaten zerfällt die Normalgleichungsmatrix in eine obere 4x4-Diagonalmatrix und eine untere voll besetzte 3x3-Submatrix.

$\rightarrow dU_0$ und $d\mu$ können direkt berechnet werden.

3.16.2 Zweistufige Lösung

Voraussetzung: Genähert horizontale Modelle $\Rightarrow \Omega$ und Φ sind klein.

Lösung: **Iterative Lage-Höheneinpassung**

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \cos K & \sin K & -d\Phi \cos K + d\Omega \sin K \\ -\sin K & \cos K & d\Phi \sin K + d\Omega \cos K \\ d\Phi & -d\Omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

1. Lageeinpassung

Ebene Drehstreckung: $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \cos K & \sin K \\ -\sin K & \cos K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} -d\Phi \cos K + d\Omega \sin K \\ d\Phi \sin K + d\Omega \cos K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - Zd\Phi & Y + d\Omega \\ Y + d\Omega & -(X - Zd\Phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \cos K \\ \mu \sin K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$$

mind. 2 Passpunkte \rightarrow Ausgleich $\Rightarrow \mu, K, U_0$ und V_0



3. Zweibildorientierung

3.16 Absolute Orientierung

cont.

2. Höhereinpassung

Horizontierung: $w = \mu(Xd\Phi - Yd\Omega + Z) + W_0$

mind. 3 Höhenpasspunkte \rightarrow Ausgleich $\Rightarrow d\Omega, d\Phi, W_0$

Iteration

Die zweistufige Lösung spielt heute keine Rolle mehr.

Früher: \triangleright Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen

\triangleright empirische Orientierung am Analogauswertegerät

3.16.3 Direkte Kleinste-Quadrate-Schätzung

Verfahren nach Arun et al. (1987)

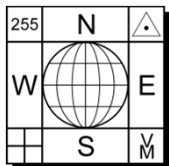
Der Algorithmus ist hier für gleichgewichtete Beobachtungen angeschrieben: Quadratsumme der Klaffen $\stackrel{!}{=} \text{Minimum}$.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mu \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad \text{Modell}$$

$$\mu^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) = \mu^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad \text{aus Symmetriegründen}$$

$$\text{Translation: } \begin{cases} \mathbf{U}_0 = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{U}_n}{N} \\ \mathbf{X}_0 = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{X}_n}{N} \end{cases} \quad N \geq 3 \dots \text{Anzahl der Punkte}$$

$$\text{Maßstab: } \mu = \left(\frac{\sum_{n=1}^N (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)^T (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)}{\sum_{n=1}^N (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)} \right)^{\frac{1}{2}}$$



3. Zweibildorientierung

3.16 Absolute Orientierung

cont.

$$\text{Rotationsmatrix: } \mathbf{b}_n = \mu^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) \quad \mathbf{a}_n = \mu^{\frac{1}{2}}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^N (\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n^T) = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \quad \mathbf{H} \dots \text{asymmetrische Matrix}$$

$$\rightarrow \text{SVD} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{U}^T$$

3.16.4 Näherungslösung mit 3 Punkten

Lösung wie vorhin, jedoch:

Bei nur 3 Vollpasspunkten kann \mathbf{R} auch mit jener Methode berechnet werden, welche beim räumlichen Rückwärtsschnitt zur Berechnung der Rotationsmatrix angewandt wurde.

Die beiden Überbestimmungen können zur Fehlerdetektion herangezogen werden.

Qualitätskontrolle und Genauigkeitsanalyse:

Berechnung der inneren Zuverlässigkeit mit Hilfe von \mathbf{Q}_{vv} .

Data Snooping mittels normierter Verbesserungen ist besonders zu empfehlen, da bei der AO in der Praxis besonders oft grobe Fehler vorkommen.

$$\mathbf{Q}_{tt} = \mathbf{N}^{-1} \hat{\sigma}_0^2$$



4. Dreibildorientierung

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Orientierung eines Stereotriplets erörtert.

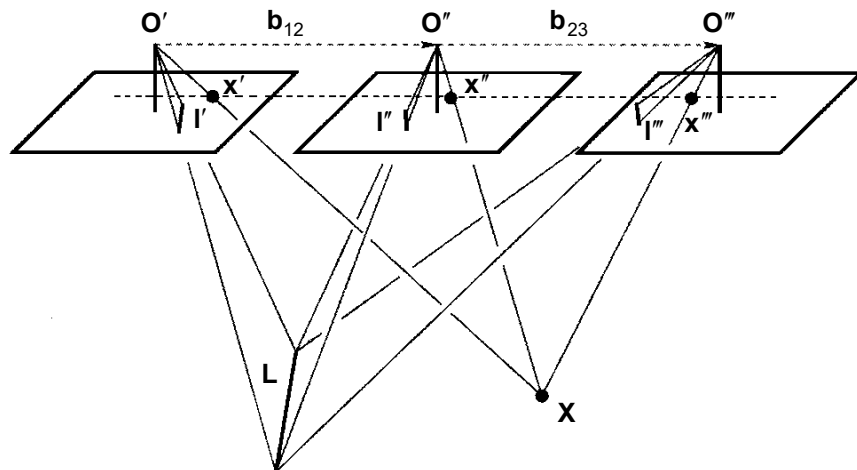
Einführende Überlegungen zur Dreibild-Orientierung:

- Aus den drei Bildern lassen sich durch RO von jeweils zwei Bildern (1,2), (1,3) und (2,3) insgesamt drei photogrammetrische Stereomodelle erzeugen. Über eine wechselseitige Maßstabsbeziehung kann keine Aussage getroffen werden.
- Die Zweibild-Orientierung beruht auf der Komplanaritätsbedingung. Daraus folgt z.B. für den photogrammetrischen Normalfall, dass die Y-Koordinate kontrolliert ist und die X-Koordinate hingegen nicht.
- Durch die (gemeinsame) relative Orientierung der drei Bilder können alle gemessenen Bildkoordinaten durch entsprechende Bedingungen kontrolliert werden.
- Die RO eines Bildpaares kann nur über homologe Punkte erfolgen → homologe Geraden liefern keine Bedingung. Im Gegensatz zur RO des Bildpaares können beim Bildtriplet auch homologe Geraden verwendet werden.

Die Bedingungen zwischen den homologen Punkten (x' , x'' , x''') und Geraden (l' , l'' , l''') sind linear in den jeweiligen homogenen Parametrisierungen.

Der **trifokale Tensor (trifocal tensor) T** ist eine $3 \times 3 \times 3$ -Matrix mit 27 Elementen. Der trifokale Tensor beschreibt vollständig die Geometrie des Bildtriplets, analog zur Fundamental-Matrix F für das Bildpaar.

- Die Prädiktion von Punkten und Geraden von zwei Bildern in das dritte kann mit dem trifokalen Tensor ohne Umweg über den Objektraum (= Objektrekonstruktion) direkt erfolgen. Der Punkt bzw. die Gerade muss nicht in 3D berechnet werden!



Die Prädiktion von x''' über Kernstrahlen versagt, wenn die Projektionszentren kollinear sind. Diese Singularität existiert bei der Prädiktion mittels trifokalem Tensor nicht.



4. Dreibildorientierung

4.2 Parameteranzahl

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{P}'\mathbf{X} \\ \mathbf{x}'' &= \mathbf{P}''\mathbf{X} \\ \mathbf{x}''' &= \mathbf{P}'''\mathbf{X} \end{aligned} \right\} 3 \times 11P = 33 P$$

Nicht kalibrierte Kamera \rightarrow 3D-Modell ist projektiv verzerrt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}_{4 \times 4} \mathbf{X}$$

$\mathbf{H}_{4 \times 4}$... 3D Homographie (DOF=15)

$33 - 15 = 18 \Rightarrow$ Die RO eines Bildtriplets nicht kalibrierter Kameras umfasst 18 unabhängige Parameter.

Die Zahl 18 kann auch wie folgt abgeleitet werden:

- Zweistufiges Orientierungsverfahren: ① RO von zwei Bildern $\rightarrow \mathbf{F}_{12}$: 7 DOF \rightarrow Ergebnis: photogrammetrisches Modell
 ② DLT des dritten Bildes $\rightarrow \mathbf{P}'''$: 11 DOF \rightarrow Ergebnis: RO der drei Bilder

Jeder Modellpunkt kann durch seine (homogenen) Koordinaten angegeben werden.
 Diese Punkte werden dann in weiterer Folge für die DLT des dritten Bildes herangezogen.

Gesamtanzahl der Parameter: $7 + 11 = 18$

Analoge Überlegungen für den Fall der kalibrierten Kamera.

Kameras	#P O/Bild	#P O/Bildtriplet	#P /RO	#P /AO	#CP	#CL
kalibriert	6	18	11	7	≥ 3	≥ 2
nicht kalibriert*	11	33	18	15	≥ 5	≥ 4

*(straight line preserving)

#P ... Anzahl der unabhängigen Parameter

O ... $O = EO + IO$

RO ... relative Orientierung

AO ... absolute Orientierung

#CP ... Minimalanzahl von Passpunkten

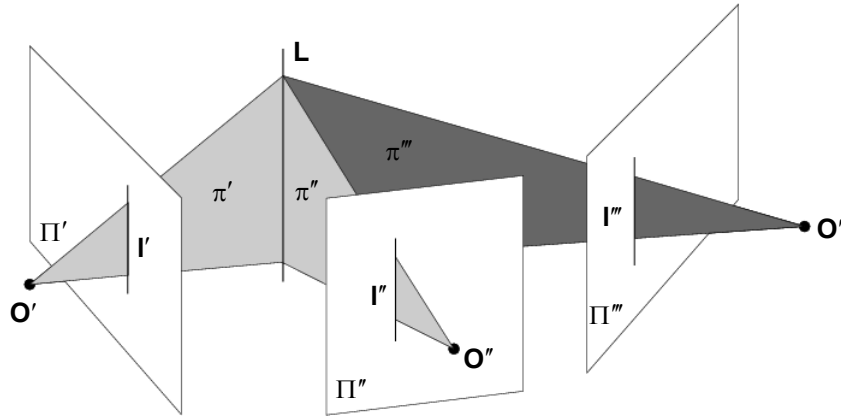
#CL ... Minimalanzahl von Passgeraden



4. Dreibildorientierung

4.3 Trifokaler Tensor

Die Ableitung des trifokalen Tensors kann am Beispiel von homologen Geraden sehr intuitiv gezeigt werden.



Haben wir eine Gerade I' im ersten und eine Gerade I'' im zweiten Bild, so ergibt sich die Raumgerade L durch Schnitt der entsprechenden Projektionsebenen π' und π'' .

$$\pi' = \mathbf{P}'^T I' \quad (\text{Beweis siehe nächste Seite.})$$

$$\pi'' = \mathbf{P}''^T I''$$

Die Gerade I''' ergibt sich als Schnitt von π''' mit dem dritten Bild.

$$\pi''' = \mathbf{P}'''^T I'''$$

⇒ Rekonstruktion: Die drei Ebenen müssen sich in L schneiden.

$$I'_i \leftrightarrow I''_i \leftrightarrow I'''_i$$

$$\mathbf{P}' = [\mathbf{I} \mid \mathbf{0}] \quad \dots \text{ Startposition}$$

$$\mathbf{P}'' = [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}_4]$$

$$\mathbf{P}''' = [\mathbf{B} \mid \mathbf{b}_4]$$

$$\mathbf{P}', \mathbf{P}'', \mathbf{P}''' \quad \dots \text{ Projektionsmatrizen (camera matrices)}$$

$$\mathbf{I} \quad \dots \text{ Einheitsmatrix}$$

$$\mathbf{P}'' = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$$

$$\mathbf{P}''' = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$$

$\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \quad \dots \quad i$ -te Spalte der jeweiligen Projektionsmatrix



4. Dreibildorientierung

4.3 Trifokaler Tensor

Beweis: Die Menge aller Raumpunkte, welche mit einer Projektionsmatrix \mathbf{P} in eine Gerade \mathbf{l} abgebildet wird, liegt in einer Ebene $\mathbf{P}^T \mathbf{l}$.

$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$... Geradengleichung im Bild (\mathbf{x} liegt auf \mathbf{l}).

$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}$... Abbildung in das Bild

$$\mathbf{X}^T \mathbf{P}^T = \mathbf{x}^T \Rightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{P}^T \mathbf{l} = 0$$

\mathbf{X} ist ein Punkt der Ebene, dann und nur dann, wenn \mathbf{X} in einen Punkt auf \mathbf{l} abgebildet wird.
 $\mathbf{P}^T \mathbf{l}$ ist die Rückprojektion der Geraden \mathbf{l} .

\mathbf{a}_4 und \mathbf{b}_4 sind die Kernpunkte bezüglich des ersten Bildes im zweiten und dritten Bild.

Rückprojektion (*back-projection*):

$$\pi' = \mathbf{P}'^T \mathbf{l}' = \begin{pmatrix} \mathbf{l}' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi'' = \mathbf{P}''^T \mathbf{l}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{l}'' \\ \mathbf{a}_4^T \mathbf{l}'' \end{pmatrix} \quad \pi''' = \mathbf{P}'''^T \mathbf{l}''' = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{l}''' \\ \mathbf{b}_4^T \mathbf{l}''' \end{pmatrix}$$

Schnittbedingung für 3 Geraden im Raum:

$$\mathbf{M} = [\pi', \pi'', \pi'''] \quad \mathbf{M} \dots 4 \times 3\text{-matrix}$$

\mathbf{M} muss Rang 2 haben!

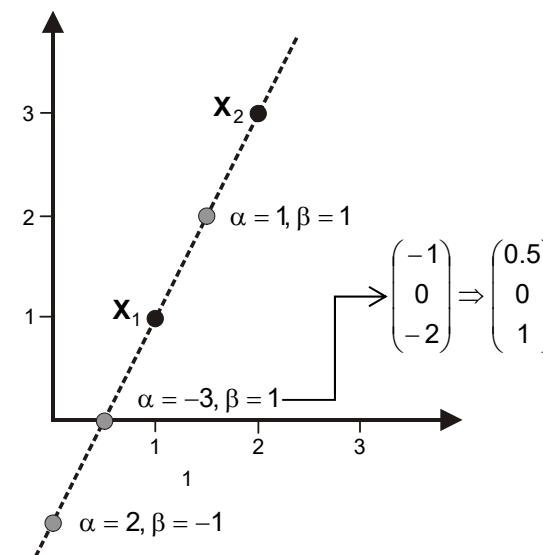
$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + \beta \mathbf{X}_2 \quad \text{Geradengleichung; } \mathbf{X}_1 \text{ und } \mathbf{X}_2 \text{ sind linear unabhängig.}$$

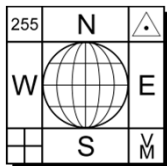
$$\pi'^T \mathbf{X} = \pi''^T \mathbf{X} = \pi'''^T \mathbf{X} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}^T \mathbf{X} = 0$$

$$\text{Da } \mathbf{M}^T \mathbf{X}_1 = 0 \text{ und } \mathbf{M}^T \mathbf{X}_2 = 0 \Rightarrow \text{rg}(\mathbf{M}) = 2$$

Beweis: $\mathbf{P}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$... Geradengleichung





4. Dreibildorientierung

4.3 Trifokaler Tensor

Da der Rang 2 ist, müssen zwischen den Spalten m_i lineare Abhängigkeiten bestehen.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{l}' & \mathbf{A}^T \mathbf{l}'' & \mathbf{B}^T \mathbf{l}''' \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_4^T \mathbf{l}'' & \mathbf{b}_4^T \mathbf{l}''' \end{bmatrix}$$

Die lineare Abhängigkeit kann man wie folgt anschreiben:

$$\mathbf{m}_1 = \alpha \mathbf{m}_2 + \beta \mathbf{m}_3$$

$$0 = \alpha \mathbf{a}_4^T \mathbf{l}'' + \beta \mathbf{b}_4^T \mathbf{l}''' \Rightarrow \alpha = k(\mathbf{b}_4^T \mathbf{l}''') \text{ und } \beta = -k(\mathbf{a}_4^T \mathbf{l}'''); k \dots \text{ Skalar}$$

α und β in den oberen 3-Vektor einsetzen:

$$\mathbf{l}' = k(\mathbf{b}_4^T \mathbf{l}''') \mathbf{A}^T \mathbf{l}'' - k(\mathbf{a}_4^T \mathbf{l}''') \mathbf{B}^T \mathbf{l}''' = (\mathbf{l}'''^T \mathbf{b}_4) \mathbf{A}^T \mathbf{l}'' - (\mathbf{l}'''^T \mathbf{a}_4) \mathbf{B}^T \mathbf{l}'''$$

$$l'_i = \mathbf{l}'''^T (\mathbf{b}_4 \mathbf{a}_i^T) \mathbf{l}'' - \mathbf{l}'''^T (\mathbf{a}_4 \mathbf{b}_i^T) \mathbf{l}''' = \mathbf{l}'''^T (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_4^T) \mathbf{l}'' - \mathbf{l}'''^T (\mathbf{a}_4 \mathbf{b}_i^T) \mathbf{l}'''$$

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_4^T - \mathbf{a}_4^T \mathbf{b}_i = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3\} \quad \text{trifokaler Tensor (trifocal tensor)}$$

$$l'_i = \mathbf{l}'''^T \mathbf{T}_i \mathbf{l}''; \quad \mathbf{l}'^T = \mathbf{l}'''^T [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3] \mathbf{l}''$$

$$\mathbf{l}' \cong \begin{pmatrix} \mathbf{l}'''^T \mathbf{T}_1 \mathbf{l}'' \\ \mathbf{l}'''^T \mathbf{T}_2 \mathbf{l}'' \\ \mathbf{l}'''^T \mathbf{T}_3 \mathbf{l}'' \end{pmatrix}$$

Für ein Bildtriplet existieren noch zwei weitere Tensoren ($\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_i''$), welche aus \mathbf{T}_i abgeleitet werden können.

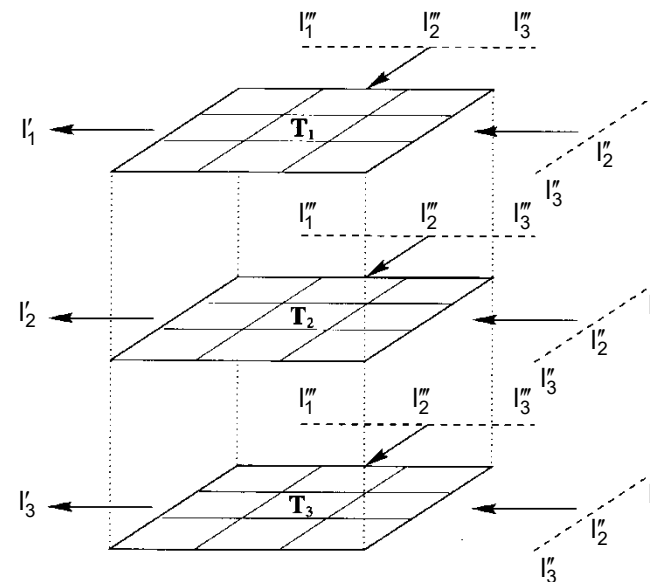
Eigenschaften des trifokalen Tensors: ■ $3 \times 3 \times 3$ -Matrix (27 Elemente)

■ homogene Matrix (\Rightarrow 26 unabhängige Quotienten)

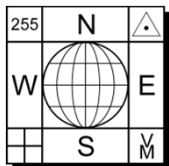
■ 18 DOF (= 33 - 15)

■ 26 - 18 = 8 unabhängige algebraische Bedingungen

■ $\Rightarrow \mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{13}, \mathbf{F}_{23} \Rightarrow \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \quad \mathbf{T}_i^{jk}$



3D Darstellung des trifokalen Tensors.

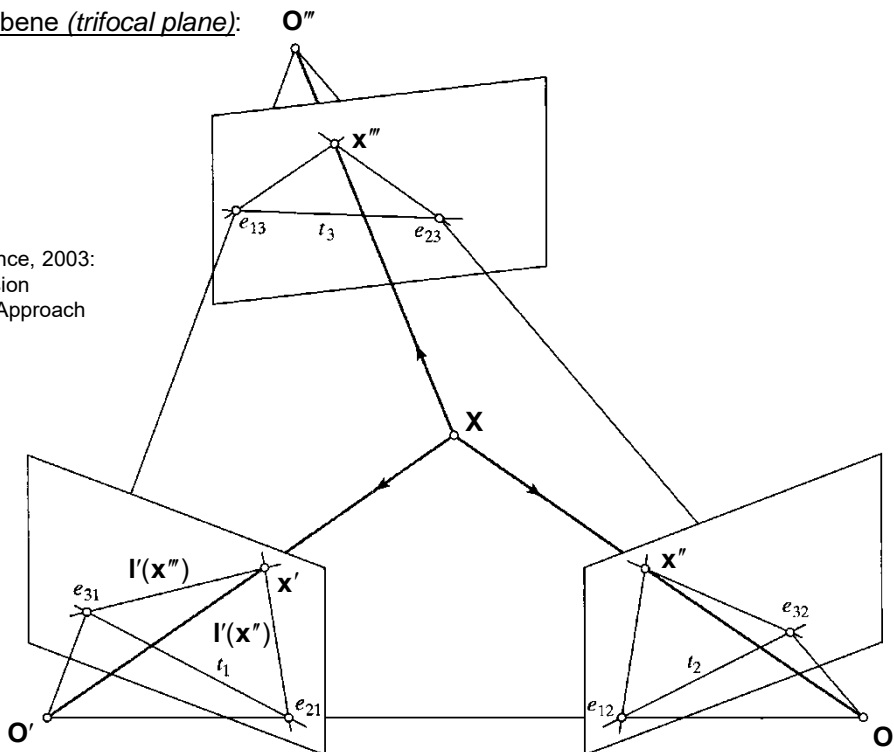


4. Dreibildorientierung

4.3 Trifokaler Tensor

Trifokale Ebene (*trifocal plane*):

Forsyth & Ponce, 2003:
Computer Vision
– A Modern Approach



Die trifokale Ebene schneidet die Bildebenen in den trifokalen Geraden (*trifocal lines*) t_1 , t_2 und t_3 .
Jede der trifokalen Geraden geht durch die entsprechenden Kernpunkte.

Punktbestimmung: Gegeben sind die Punkte x'' und x''' .
Gesucht ist x' in Π' .

$$\text{Kernstrahlen: } \begin{cases} l'(\mathbf{x}'') = \mathbf{F}_{12}\mathbf{x}'' \\ l'(\mathbf{x}''') = \mathbf{F}_{13}\mathbf{x}''' \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x}' = l'(\mathbf{x}'') \times l'(\mathbf{x}''')$$

(*epipolar transfer*)

Punkttransfer mit Fundamental-Matrizen:

\mathbf{x}' existiert nur, wenn $l'(\mathbf{x}'')$ und $l'(\mathbf{x}''')$ nicht kollinear sind.
 $\Rightarrow \mathbf{X}$ darf nicht in der trifokalen Ebene liegen.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}'^T \mathbf{F}_{12} \mathbf{x}'' &= 0 \\ \mathbf{x}''^T \mathbf{F}_{23} \mathbf{x}''' &= 0 \\ \mathbf{x}'''^T \mathbf{F}_{31} \mathbf{x}' &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{23} \text{ und } \mathbf{F}_{31} \text{ sind} \\ &\text{nicht unabhängig!} \end{aligned}$$

\Rightarrow Projektionszentren und Kernpunkte
müssen in einer Ebene liegen!

$$\Rightarrow \mathbf{e}_{31}^T \mathbf{F}_{12} \mathbf{e}_{32} = \mathbf{e}_{12}^T \mathbf{F}_{23} \mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_{23}^T \mathbf{F}_{31} \mathbf{e}_{21} = 0$$



4. Dreibildorientierung

4.3 Trifokaler Tensor

Summary of trifocal tensor incidence relations using matrix notation:

(i) Line-line-line correspondence

$$\mathbf{l}''^T [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3] \mathbf{l}''' = \mathbf{l}'^T \quad \text{or} \quad (\mathbf{l}''^T [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3] \mathbf{l}''') [\mathbf{l}']_x = \mathbf{0}^T$$

(ii) Point-line-line correspondence

$$\mathbf{l}''^T \left(\sum_i x'^i \mathbf{T}_i \right) \mathbf{l}''' = 0 \quad \text{for a correspondence } \mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{l}'' \leftrightarrow \mathbf{l}'''$$

(iii) Point-line-point correspondence

$$\mathbf{l}''^T \left(\sum_i x'^i \mathbf{T}_i \right) [\mathbf{x}''']_x = \mathbf{0}^T \quad \text{for a correspondence } \mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{l}'' \leftrightarrow \mathbf{x}'''$$

(iv) Point-point-line correspondence

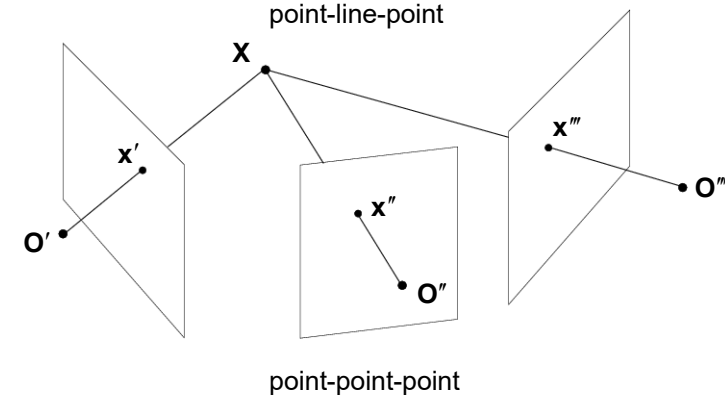
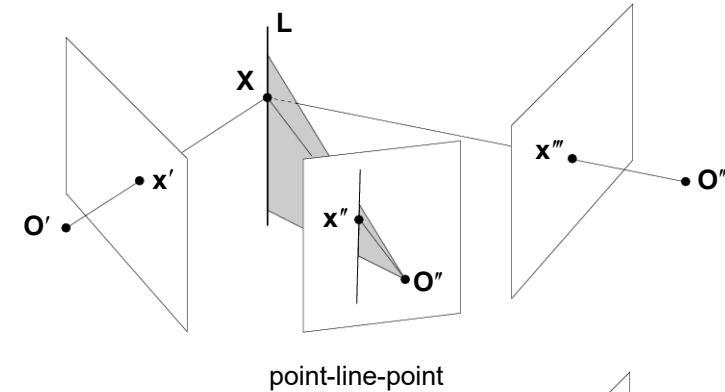
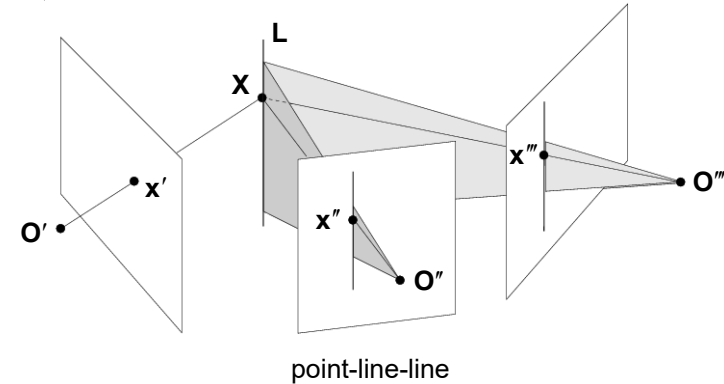
$$[\mathbf{x}''']_x \left(\sum_i x'^i \mathbf{T}_i \right) \mathbf{l}''' = \mathbf{0}^T \quad \text{for a correspondence } \mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{x}'' \leftrightarrow \mathbf{l}'''$$

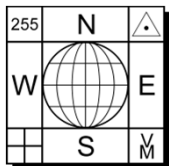
(v) Point-point-point correspondence

$$[\mathbf{x}''']_x \left(\sum_i x'^i \mathbf{T}_i \right) [\mathbf{x}'']_x = \mathbf{0}_{3 \times 3}$$

$$[\mathbf{a}]_x = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_x \mathbf{b} = (\mathbf{a}^T [\mathbf{b}]_x)^T$$





4. Dreibildorientierung

4.4 Berechnung des trifokalen Tensors

Vorgangsweise ähnlich wie bei der Berechnung der Fundamentalmatrix F .

- Direkte lineare Lösung: The normalized linear algorithm → unconstrained solution minimizing algebraic error (Bedingungen für eine gültige Lösung des trifokalen Tensors werden nicht berücksichtigt!)
- Iterative Lösung:
 - The unconstrained solution minimizing reprojection error
 - The constrained solution minimization algebraic error → Minimierung des algebraischen Fehlers mit Erfüllung aller Bedingungen für T_i^{jk} .
 - Constrained solution minimizing reprojection error → Minimierung des geometrischen Fehlers (stochastischer Ansatz, vgl. Bündelausgleich)

Grundgleichungen → (tri-)lineare Gleichungen, Relationen siehe vorherige Seite.

Korrespondenz	Zahl der linear unabhängigen Gleichungen
3 Punkte	4
2 Punkte, 1 Gerade	2
1 Punkt, 2 Geraden	1
3 Geraden	2

+ Die IO kann über die bekannten *Kruppa-Gleichungen* bestimmt werden. Anschließend euklidische Rekonstruktion mind. 5 Passpunkten. → gute Näherungswerte → Bündelausgleich

Tri-lineare Beziehungen zw. Punkt- und Linienkoordinaten in drei Bildern.

$A\mathbf{t} = 0$ $\mathbf{t}_{27 \times 1}$ -Vektor

Minimum $\|A\mathbf{t}\|$ mit $\|\mathbf{t}\| = 1$ Numerische Stabilität: Normierung der Koordinaten unbedingt notwendig!

F : 1 Bedingung $\det(F) = 0$
 T_i^{jk} : 8 Bedingungen! + Skalierung

Minimalfall: $n=6$ homologe Punkte in den drei Bildern. Lösung beruht auf der sog. Carlsson-Weinshall Duality. Es gibt 1 oder 3 Lösungen.

- Elimination grober Fehler:
- (1) Berechne F_{12} mit RANSAC.
 - (2) Berechne F_{13} mit RANSAC.
 - (3) Berechne T_i^{jk} für das Triplet.

Dissertation Ressler (2004): Ist die innere Orientierung bekannt, dann kann die EO mit Hilfe des trifokalen Tensors mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden. Minimum sind 7 homologe Punkte. Tiefe der Objektpunkte sollte mind. 1% der Aufnahmeentfernung betragen. Ist die innere Orientierung unbekannt, dann sollten mind. 15 Punkte – davon 4 Punkte relativ weit von einer Ebene entfernt – zur Berechnung des trifokalen Tensors herangezogen werden.



4. Dreibildorientierung

4.4 Berechnung des trifokalen Tensors

Automatic computation of the trifocal tensor between three images using RANSAC (1/3)

Objective Compute the trifocal tensor between three images.

Algorithm

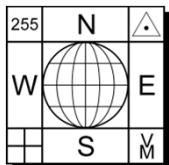
- (i) **Interest points:** Compute interest points in each image.
- (ii) **Two-view correspondences:** Compute interest point correspondences (and F) between views 1 & 2, and 2 & 3 using algorithm 11.4(p291).
- (iii) **Putative three-view correspondences:** Compute a set of interest point correspondences over three views by joining the two-view match sets.
- (iv) **RANSAC robust estimation:** Repeat for N samples, where N is determined adaptively as in algorithm 4.5(p121):
 - (a) Select a random sample of 6 correspondences and compute the trifocal tensor using algorithm 20.1(p511). There will be one or three real solutions.
 - (b) Calculate the distance d_{\perp} in \mathbb{R}^6 from each putative correspondence to the variety described by \mathcal{T} , as in section 16.6.
 - (c) Compute the number of inliers consistent with \mathcal{T} by the number of correspondences for which $d_{\perp} < t$.
 - (d) If there are three real solutions for \mathcal{T} the number of inliers is computed for each solution, and the solution with most inliers retained.

Choose the \mathcal{T} with the largest number of inliers. In the case of ties choose the solution that has the lowest standard deviation of inliers.

- (v) **Optimal estimation:** Re-estimate \mathcal{T} from all correspondences classified as inliers using the Gold Standard algorithm 16.3 or the Sampson approximation to this.
- (vi) **Guided matching:** Further interest point correspondences are now determined using the estimated \mathcal{T} as described in the text.

The last two steps can be iterated until the number of correspondences is stable.

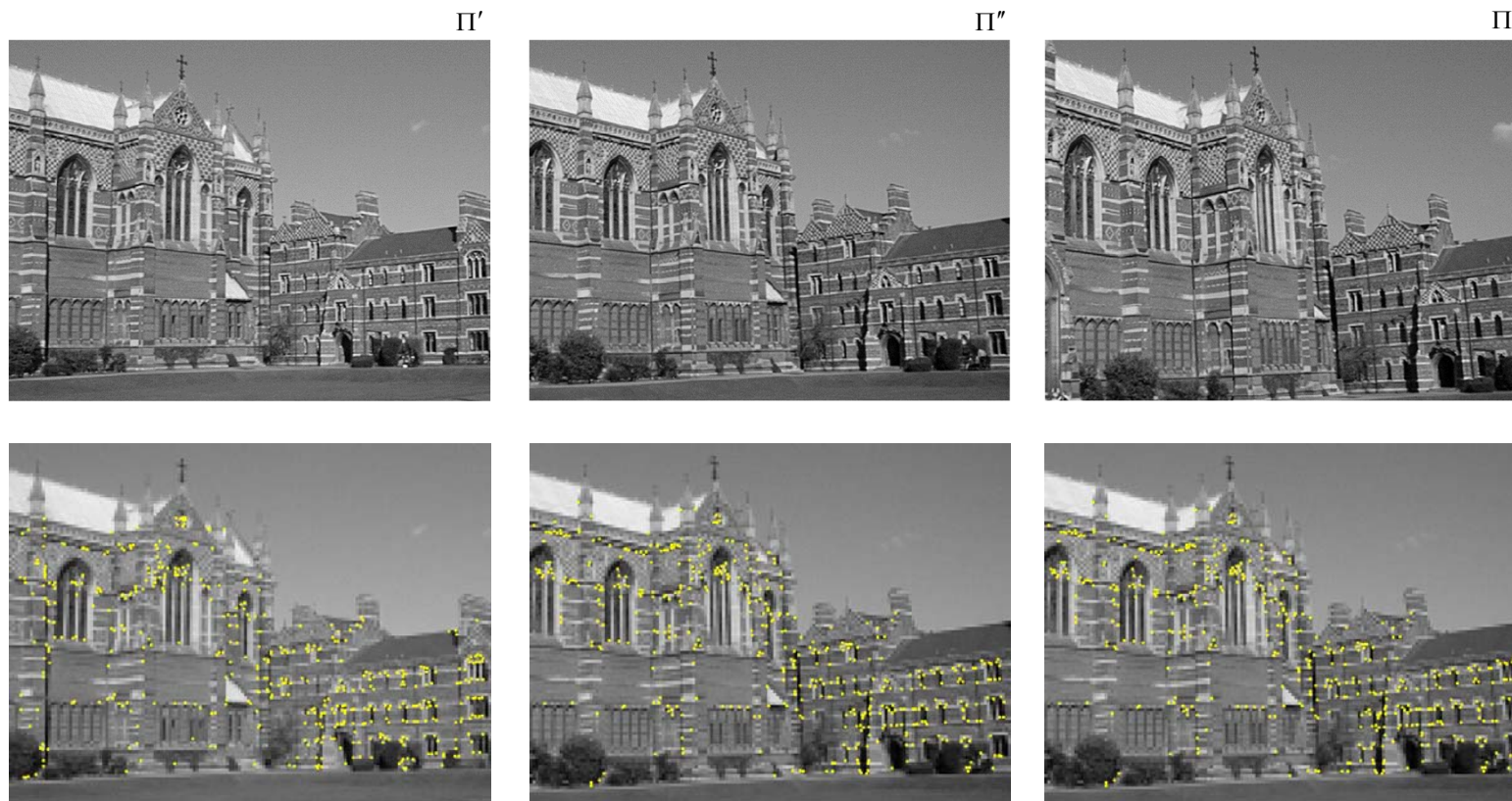
Quelle:
Multiple View
Geometry;
Hartley &
Zisserman,
2003



4. Dreibildorientierung

4.4 Berechnung des trifokalen Tensors

Automatic computation of the trifocal tensor between three images using RANSAC (2/3)



approx. 500 corners on each image

Quelle:
Multiple View
Geometry;
Hartley &
Zisserman,
2003

The motion between views consists of a translation and rotation. The images are 640×480 pixels.

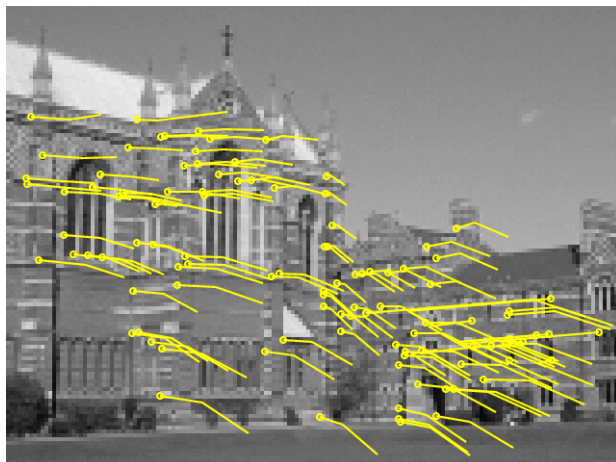


4. Dreibildorientierung

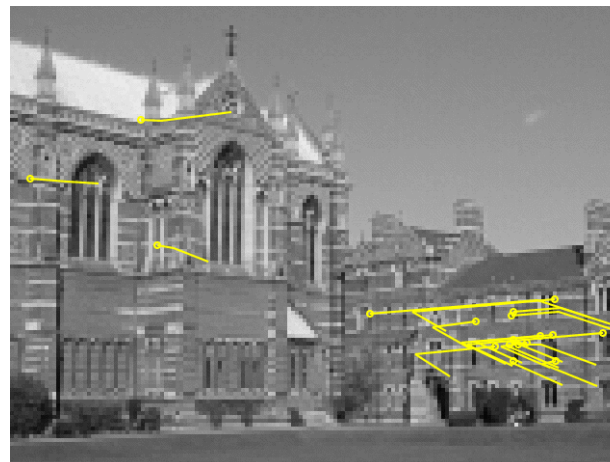
4.4 Berechnung des trifokalen Tensors

Automatic computation of the trifocal tensor between three images using RANSAC (3/3)

Π'



106 putative matches

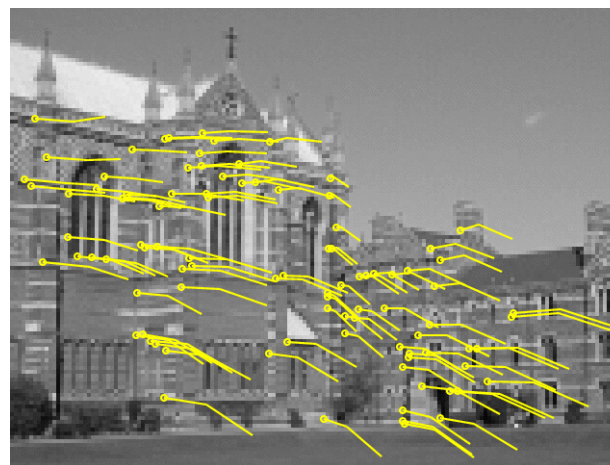


18 outliers

Quelle:
Multiple View
Geometry;
Hartley &
Zisserman,
2003



88 correspondences consistent with the estimated T



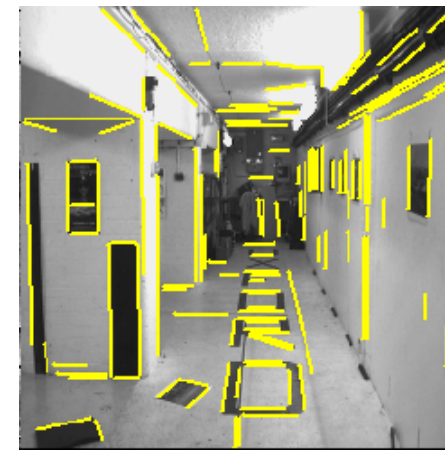
Final set of 95 correspondences after guided matching and MLE.



4. Dreibildorientierung

4.4 Berechnung des trifokalen Tensors

Image triplet matching



Quelle:
Multiple View
Geometry;
Hartley &
Zisserman,
2003

The trifocal tensor is computed automatically from interest points and subsequently used to match line features across views.

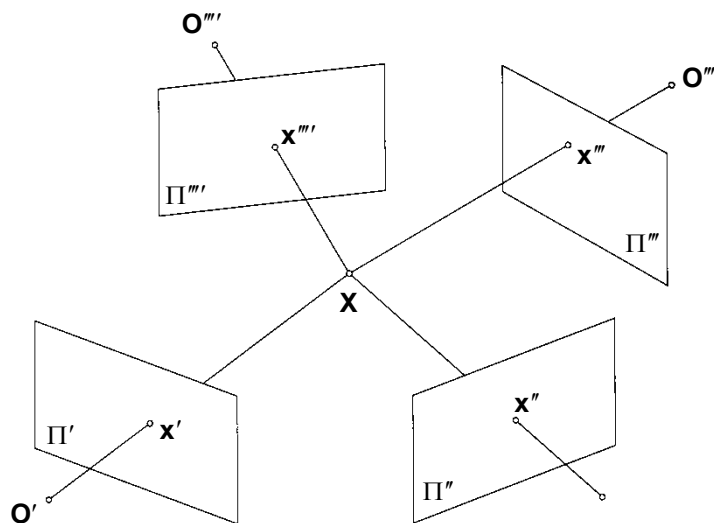


5. Vierbildorientierung

5.1 Quadrifokaler Tensor

Der quadrifokale Tensor (*quadrifocal tensor*) für vier Bilder ist das Analogon zur Fundamentalmatrix für zwei und zum trifokalen Tensor für drei Bilder. 1995 erstmals durch Triggs eingeführt.

Quadrilineare Beziehungen (*quadrilinear relations*) für vier Bilder: $x' \leftrightarrow x'' \leftrightarrow x''' \leftrightarrow x''''$ (z.B. Punkt-Punkt-Punkt-Punkt-Transfer)



Q^{pqrs} ... quadrifokaler Tensor (4-dimensional)

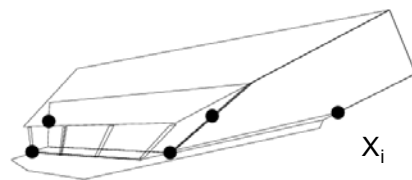
Anmerkungen zur metrischen Rekonstruktion (*metric reconstruction*) aus nicht kalibrierten Aufnahmen:

$$X^E_i = HX_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

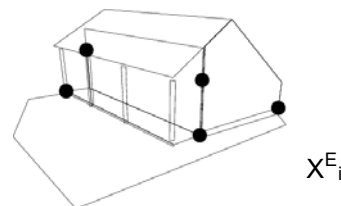
$$x'_i = PH^{-1}X^E_i$$



mind. 5 Passpunkte



projektive Rekonstruktion



metrische (euklidische) Rekonstruktion



5. Vierbildorientierung

5.1 Quadrifokaler Tensor

Anzahl der Freiheitsgrade und Anzahl der Bedingungen:

$$\# \text{ DOF} = 11m - 15 ; \quad m \dots \text{Anzahl der Bilder}$$

$$n \geq \frac{11m - 15}{2m - 3} ; \quad l \geq \frac{11m - 15}{2m - 4}$$

# Bilder	Tensor	# Elemente	# DOF	linear		nicht linear	
				# Punkte	# Gerade	# Punkte	# Gerade
2	F	9	7	8	-	7*	-
3	T	27	18	7	13	6*	9*?
4	Q	81	29	6	9	6	8?

Projective degrees of freedom and constraints. The linear column indicates the minimum number of correspondences across all views required to solve linearly for the tensor (up to scale). The non-linear is the minimum of correspondences required. A star indicates multiple solutions, and a question-mark indicates that no practical reconstruction method is known.

n ... notwendige Anzahl der Punkte (# Punkte) , l ... notwendige Anzahl der Geraden (# Gerade)

11m ... DOF EO

15 ... DOF projective transformation (AO)

2m ... 2 Koordinaten pro Bild bzw. 2 Parameter pro Gerade und Bild

3 ... 3 Objektkoordinaten

4 ... 4 Parameter zur Parametrisierung einer Geraden im Raum

Korrespondenz	Zahl der linear unabhängigen Gleichungen
4 Punkte	16
3 Punkte, 1 Gerade	8
2 Punkte, 2 Geraden	4
3 Geraden	3
4 Geraden	2

Für mehr als vier Bilder existieren
keine weiteren mathematischen Beziehungen.

Quadrilineare Beziehungen



6. Mehrbildorientierung

6.1 Einleitung

Prinzip: Photogrammetrische Grundeinheiten sind ① Strahlenbündel → **Bündelblockausgleichung**
② Stereomodelle → **Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen**
(Keine wesentliche Bedeutung mehr.
Programm PAT-M, Universität Stuttgart, Prof. F. Ackermann, ab 1972.
Siehe Grundvorlesung "Photogrammetrie".)

Synonyme: Photogrammetrische Triangulation (*photogrammetric triangulation*)

Bündeltriangulation

Bündelausgleichung (*bundle adjustment*)

Bündelblockausgleichung (*bundle block adjustment*)

Mehrbildtriangulation (*multi-image triangulation*)

Aerotriangulation (*aerial triangulation*)

Die **Bündeltriangulation** ist ein Verfahren zur simultanen rechnerischen Einpassung beliebig vieler im Raum angeordneter Bilder (Strahlenbündel) unter Berücksichtigung photogrammetrisch gemessener Bildpunkte und geodätischer Beobachtungen sowie eines übergeordneten Koordinatensystems. Die einzelnen Bilder werden mit Hilfe identischer (korrespondierender/homologer) Punkte zu einem Gesamtmodell verknüpft, in dem das Objekt bereits vollständig dreidimensional rekonstruiert werden kann. Der Bezug zu einem übergeordneten Objektkoordinatensystem kann durch eine minimale Zahl von Passpunkten erfolgen, so dass größere passpunktlose Räume durch Mehrbildverbände überbrückt werden können. Als wichtigste geometrische Bedingung wird dabei die Forderung genutzt, dass sich alle korrespondierenden (homologen) Bildstrahlen optimal in ihrem Objektpunkt schneiden sollen.

In einem überbestimmten Gleichungssystem werden 3D-Objektkoordinaten, Orientierungsparameter der Bilder und weitere Modellparameter zusammen mit ihren zugehörigen statistischen Angaben zur Genauigkeit und Zuverlässigkeit durch Ausgleichung berechnet. Da alle beobachteten (gemessenen) Größen und alle unbekannt Parameter eines photogrammetrischen Bildverbandes in einem simultanen Berechnungsvorgang berücksichtigt werden, ist die Bündeltriangulation das leistungsfähigste und genaueste Verfahren zur Bildorientierung und Punktbestimmung in der Photogrammetrie. (Definition nach Th. Luhmann, 2003: Nahbereichsphotogrammetrie – Grundlagen, Methoden und Anwendungen.)

Die Einführung von zusätzlichen Parametern und die Möglichkeit der simultanen Kamerakalibrierung in der Bündeltriangulation reduzieren die systematischen Fehler der Bilder und des photogrammetrischen Systems und steigern die Genauigkeit.

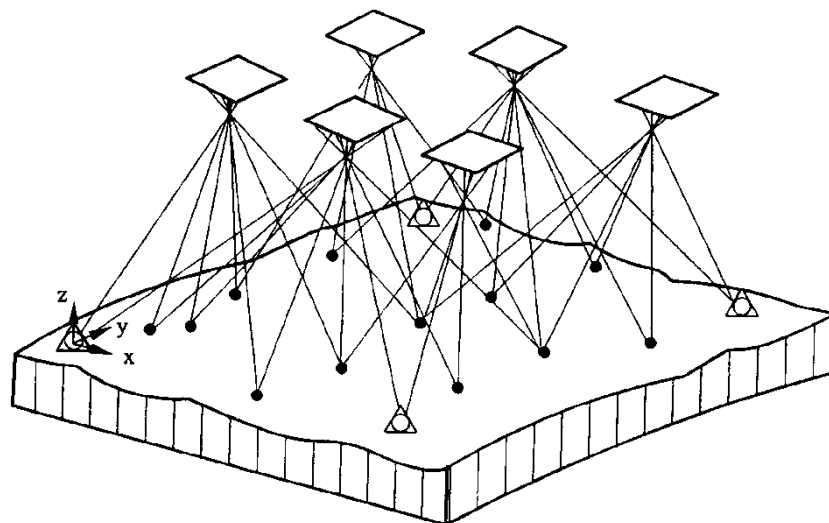
Die Methode der Bündeltriangulation lässt sich sowohl für Luftbilder als auch für terrestrische Anwendungen benutzen.



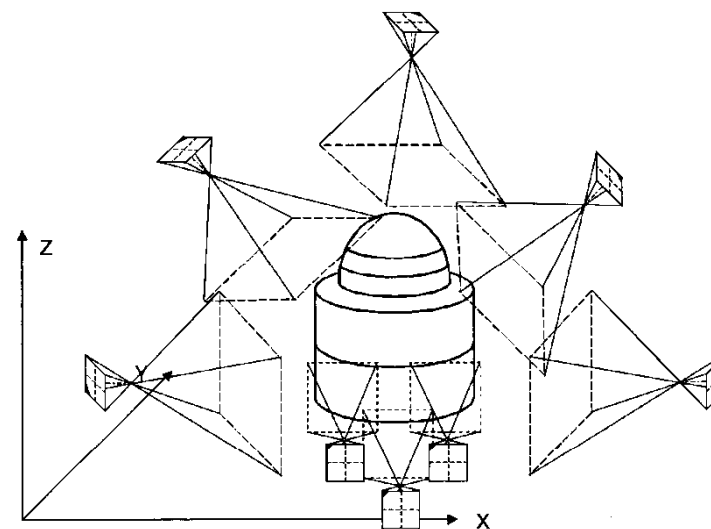
6. Mehrbildorientierung

6.1 Einleitung

meist regelmäßiger Bildverband
in der Aerotriangulation



Grundprinzip der Bündelblockausgleichung
(K. Kraus, 2004)

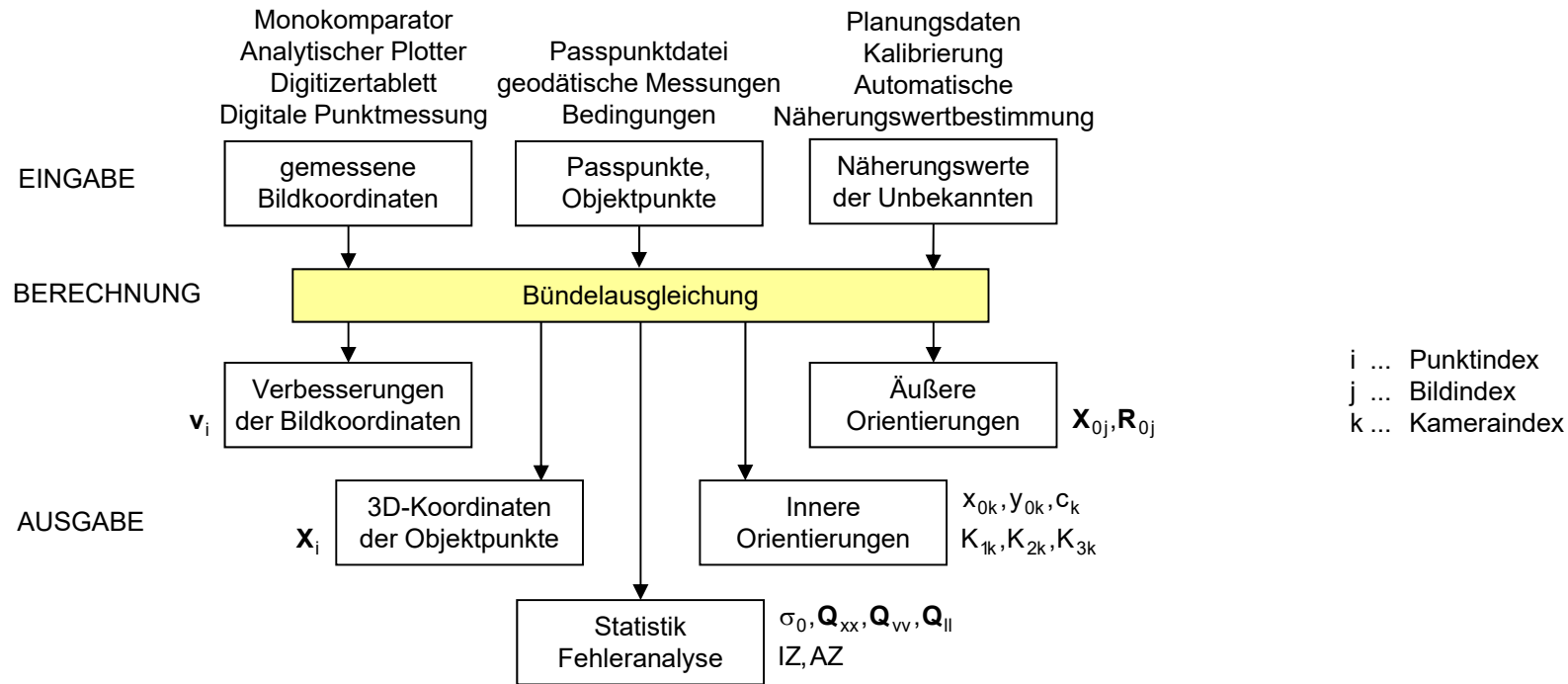


Beliebige Aufnahmeconfiguration im Nahbereich
(Th. Luhmann, 2003)



6. Mehrbildorientierung

6.1 Einleitung



Datenfluss für die Bündelausgleichung
(Th. Luhmann, 2003)

Anmerkungen: Eingabewerte für die Bündelausgleichung sind zunächst photogrammetrische Bildkoordinaten, die einem manuellen oder automatischen (digitalen) Bildmesssystem entstammen. Bildpunkt: eindeutige Punktbezeichnung und zugehörige Bildnummer. Unter Verwendung einer kalibrierten Kamera kann die durch die Objektpunkte repräsentierte Oberfläche bereits eindeutig und formtreu rekonstruiert werden. Zur Festlegung des absoluten Maßstabes und der Lage des Objektkoordinatensystems (Datumsdefinition) werden zusätzliche Informationen zum Objektraum benötigt: z.B. gemessene Strecken, Winkel, Punkte, Gerade, Ebenen. Für die Linearisierung des funktionalen Modells sind schließlich noch Näherungswerte zu beschaffen. Sie können für einfache Aufnahme Konfigurationen zum Teil den Planungsdaten oder einer Aufnahmeskizze entnommen werden. Für komplexere Aufnahmesituationen (große Bildanzahl, beliebige Aufnahme richtungen) erfolgt die Näherungswertbestimmung durch iterative Berechnungsverfahren. Ergebnis einer Bündelausgleichung sind vor allem die ausgeglichenen 3D-Koordinaten der Objektpunkte. Objektkoordinaten: (i) durch Passpunkte bzw. durch (ii) freie Netzausgleichung bestimmt. Weiterverwendung der äußeren Orientierung: Photogrammetrische Auswertung am analytischen Auswertegerät, Berechnung von Vorwärtsschnitten, etc. Durch die Simultankalibrierung können die Parameter der inneren Orientierung ermittelt werden. Für die statistische Qualitätsanalyse der Bündeltriangulation werden u.a. Verbesserungen (Residuen) der Bildkoordinaten, Standardabweichungen von Objektpunkten und Orientierungsdaten, Korrelationen zwischen Parametern und Zuverlässigkeiten für die Erkennung grober Datenfehler berechnet.



6. Mehrbildorientierung

6.1 Einleitung

Besondere Probleme der Bündeltriangulation:

- Lösung großer Normalgleichungssysteme (bis einige tausend Unbekannte)
- Beschaffung von Näherungswerten der Unbekannten
- Aufdeckung und Elimination grober Datenfehler

Ausgleichung von Luftbildverbänden:

- überwiegend regelmäßig angeordnete, streifenförmige Bildverbände
 - ⇒ günstige Struktur von Normalgleichungssystemen
 - ⇒ einfache Beschaffung von Näherungswerten
- häufig große Zahl von Bildern und Objektpunkten
- Verwendung von nur einer kalibrierten Kamera

Nahbereichsphotogrammetrie (*close-range photogrammetry*):

- unregelmäßig angeordnete, beliebige (und oftmals ungünstige) Aufnahmekonfigurationen (vgl. Anwendungen im Bereich der Computer Vision)
- komplexe Struktur von Normalgleichungssystemen
- aufwendige Beschaffung von Näherungswerten
- beliebig gelagerte Objektkoordinatensysteme
- Ausgleichung zusätzlicher geodätischer Beobachtungen und Bedingungen
- (mehrere) simultan zu kalibrierende Aufnahmesysteme



6. Mehrbildorientierung

6.1 Einleitung

Geschichtliche Entwicklung der modernen Bildtriangulation:

S. Finsterwalder, 1937: Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abhandlungen Königlich-Bayerische Akademie der Wissenschaften, II Kl., XXII. Bd., II. Abt., 1903, Deutsche Gesellschaft f. Photogrammetrie, S. Finsterwalder (Hrsg.), Wichmann Verlag, Berlin, S. 225-260.

→ zur Person von S. Finsterwalder (1862-1951): http://de.wikipedia.org/wiki/Sebastian_Finsterwalder

K. Rinner, 1957: Analytische photogrammetrische Triangulation mit formtreuen Bündeln – Über räumliche Drehungen. DGK, Reihe A, Nr. 25, Bayrische Akademie d. Wissenschaften, München.

H. Schmid, 1958: Eine allgemeine analytische Lösung für die Aufgabe der Photogrammetrie. Bildmessung und Luftbildwesen, S. 103-113.

D.C. Brown, 1976: The bundle adjustment – progress and perspectives. Int. Archives of Photogrammetry, 21(3), ISP Congress, Helsinki, S. 1-33.

Entwicklungsschub in den 80er-Jahren:

Dissertationen → Jacobsen (1980), Kruck (1983), Wester-Ebbinghaus (1985), Hinsken (1987), Kager (1989), etc.

Verfeinerungen (Selbstkalibrierung) und Weiterentwicklungen (integrierte Sensororientierung) in den 90er-Jahren.

B. Triggs, Ph. Mclauchlan, R. Hartley, A. Fitzgibbon, 2000: Bundle Adjustment – A Modern Synthesis. LNCS 1883, Springer-Verlag.

Programmsysteme:

- BLUH (Jacobsen, 1980): <http://www.ipi.uni-hannover.de/html/service/bluh/bluh.htm>
- AEROSYS (Stevens): <http://aerosys.aerogeomatics.com/>
- ORIMA/CAP (Hinsken, 1989): http://gi.leica-geosystems.com/documentcenter/ORIMA/ORIMA_Brochure.pdf
- ORIENT (Kager, 1989): http://www.ipf.tuwien.ac.at/products/produktinfo/orient/html_hjk/orient.html
- BINGO (Kruck, 1983): <http://www.gip-aalen.de/>
- SBA (M.I.A. Lourakis and A.A. Argyros, 2009): SBA: A Software Package for Generic Sparse Bundle Adjustment. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 36, No. 1, Article 2, March 2009.
etc.

Integrierte Programmsysteme (in digital-photogrammetrischen Arbeitsstationen):

- ISAT (ImageStation Automatic Triangulation): <http://www.intergraph.com/isat/>
- LPS (Leica Photogrammetry Suite): <http://gis.leica-geosystems.com>
- MATCH-AT: <http://www.inpho.de/>
etc.



6. Mehrbildorientierung

6.2 Mathematisches Basismodell

Kollinearitätsbeziehungen:

$$x = x_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}}$$

$$y = y_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{j}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}}$$

Linearisierung vgl. Abschnitt 1.5

$$dx = dx_0 + \frac{x - x_0}{c} dc + u_{11}(dX_0 - dX) + u_{12}(dY_0 - dY) + u_{13}(dZ_0 - dZ) + v_{11}d\alpha_1 + v_{12}d\alpha_2 + v_{13}d\alpha_3$$

$$dy = dy_0 + \frac{y - y_0}{c} dc + u_{21}(dX_0 - dX) + u_{22}(dY_0 - dY) + u_{23}(dZ_0 - dZ) + v_{21}d\alpha_1 + v_{22}d\alpha_2 + v_{23}d\alpha_3$$

a) NEUPUNKTE

Messwerte: Bildkoordinaten x_N, y_N

Näherungen: $x_0, y_0, c; X_0, Y_0, Z_0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; X_N, Y_N, Z_N$

Unbekannte: $dx_0, dy_0, dc; dX_0, dY_0, dZ_0; d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3; dX_N, dY_N, dZ_N$

Verbesserungsgleichungen:

$$v_x = dx_0 + \frac{x - x_0}{c} dc + u_{11}(dX_0 - dX_N) + u_{12}(dY_0 - dY_N) + u_{13}(dZ_0 - dZ_N) + v_{11}d\alpha_1 + v_{12}d\alpha_2 + v_{13}d\alpha_3 + (x) - x$$

$$v_y = dy_0 + \frac{y - y_0}{c} dc + u_{21}(dX_0 - dX_N) + u_{22}(dY_0 - dY_N) + u_{23}(dZ_0 - dZ_N) + v_{21}d\alpha_1 + v_{22}d\alpha_2 + v_{23}d\alpha_3 + (y) - y$$

b) PASSPUNKTE

Messwerte: Bildkoordinaten x_P, y_P ; Objektkoordinaten X_P, Y_P, Z_P mit entsprechendem Gewicht

Näherungen: $x_0, y_0, c; X_0, Y_0, Z_0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Unbekannte: $dx_0, dy_0, dc; dX_0, dY_0, dZ_0; d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3$

Verbesserungsgleichungen:

$$v_x + u_{11}v_X + u_{12}v_Y + u_{13}v_Z = dx_0 + \frac{x - x_0}{c} dc + u_{11}dX_0 + u_{12}dY_0 + u_{13}dZ_0 + v_{11}d\alpha_1 + v_{12}d\alpha_2 + v_{13}d\alpha_3 + (x) - x$$

$$v_y + u_{21}v_X + u_{22}v_Y + u_{23}v_Z = dy_0 + \frac{y - y_0}{c} dc + u_{21}dX_0 + u_{22}dY_0 + u_{23}dZ_0 + v_{21}d\alpha_1 + v_{22}d\alpha_2 + v_{23}d\alpha_3 + (y) - y$$



6. Mehrbildorientierung

6.2 Mathematisches Basismodell

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung

Ein erweiterter Ansatz der Bündelblockausgleichung erlaubt die Berücksichtigung zusätzlicher (geodätischer) Beobachtungen wie z.B. **Strecken**, **Richtungen** oder **Winkel**. Weiters können neben den bekannten Punkten noch weitere Bedingungen über das Objekt, z.B. Koordinatenunterschiede, Geraden, Ebenen oder rotationssymmetrische Körper (vgl. Gestalten) einbezogen werden.

Alle zusätzlichen Beobachtungen können mit einem ihrer Genauigkeit oder Bedeutung entsprechenden Gewicht versehen und stochastisch streng am Ausgleichsprozess beteiligt werden.

Zwei Beispiele für Bedingungen:

c) SCHRÄGSTRECKE (als Zwangsbedingung)

$$s_{ij}^2 = (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i)^2$$

$$\text{linearisierte Bedingungsgleichung} \rightarrow a_{ij}(dX_j - dX_i) + b_{ij}(dY_j - dY_i) + c_{ij}(dZ_j - dZ_i) + (s_{ij}) - s_{ij} = 0$$

d) RICHTUNG (als Zwangsbedingung)

⇒ Zwei Zwangsbedingungen pro räumliche Richtung
gegeben: Richtungskoordinaten α, β

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{s_{ij}} (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i)$$

$$d\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta = \mathbf{a}' d\alpha + \mathbf{b}' d\beta = \begin{pmatrix} -\cos \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha + \begin{pmatrix} -\sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix} d\beta$$

$$d\mathbf{r}_{ij} = \frac{1}{s_{ij}} (d\mathbf{X}_j - d\mathbf{X}_i) - \frac{ds_{ij}}{s_{ij}^2} (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) = \frac{1}{s_{ij}} (d\mathbf{X}_j - d\mathbf{X}_i) - \frac{\mathbf{r}_{ij}}{s_{ij}} ds_{ij}$$

$$\mathbf{a}' \perp \mathbf{b}' \perp \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{a}' \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{b}' \mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{a}'^2 = \cos^2 \beta, \quad \mathbf{b}'^2 = 1$$



6. Mehrbildorientierung

6.2 Mathematisches Basismodell

$$d\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{a}'d\alpha + \mathbf{b}'d\beta = \frac{1}{s_{ij}}(d\mathbf{X}_j - d\mathbf{X}_i) - \frac{\mathbf{r}_{ij}}{s_{ij}} ds_{ij} \quad | \cdot \mathbf{a}' \quad | \cdot \mathbf{b}'$$

$$d\alpha = \frac{1}{s_{ij} \cos^2 \beta} \mathbf{a}'(d\mathbf{X}_j - d\mathbf{X}_i)$$

$$d\beta = \frac{1}{s_{ij}} \mathbf{b}'(d\mathbf{X}_j - d\mathbf{X}_i)$$

$$\text{linearisierte Bedingungsgleichungen} \rightarrow \mathbf{a}'_1(d\mathbf{X}_j - d\mathbf{X}_i) + \mathbf{a}'_2(d\mathbf{Y}_j - d\mathbf{Y}_i) + s_{ij} \cos^2 \beta \cdot [(\alpha) - \alpha] = 0$$

$$\mathbf{b}'_1(d\mathbf{X}_j - d\mathbf{X}_i) + \mathbf{b}'_2(d\mathbf{Y}_j - d\mathbf{Y}_i) + \mathbf{b}'_3(d\mathbf{Z}_j - d\mathbf{Z}_i) + s_{ij} \cdot [(\beta) - \beta] = 0$$

Gleichungssystem für den Ausgleich:

Verbesserungsgleichungen:
Bedingungsgleichungen:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}_1\mathbf{x} + \mathbf{w}_1 = 0$$

$$\mathbf{B}_2\mathbf{x} + \mathbf{w}_2 = 0$$

Im Allgemeinen werden jedoch feste Zwänge als weiche Zwänge (als zusätzliche Beobachtungen mit hohem Gewicht) eingeführt!

Mit einigen photogrammetrischen Bündeltriangulationsprogrammen kann man übrigens auch reine geodätische 3D-Netze ausgleichen.

Mit Hilfe der zusätzlichen Beobachtungen lässt sich das Ausgleichsergebnis erheblich beeinflussen:

- Schwache Aufnahmeconfigurationen können durch Einführung von zusätzlicher Einpassinformation gestützt werden.
- Geodätische (oder anders ermittelte Messungen am Objekt) und photogrammetrische Beobachtungen können gemeinsam in einem Guss ausgeglichen werden, z.B. zur Minimierung von sogenannten Netzspannungen.
- Bekannte Strecken zwischen Neupunkten können in beliebiger Zahl beobachtet und in ihrer Genauigkeit entsprechend behandelt werden.
- Einzelne Objektpunkte können durch geometrische Bedingungen auf eine Oberfläche (z.B. Zylinderfläche) gezwungen werden (vgl. Gestalten).
- Informationen zur äußeren Orientierung, die aus zusätzlichen Meßsystemen wie Inertialsystemen, GPS-Positionsbestimmung oder Kreiselsystemen stammen, können den Ausgleichsprozess positiv unterstützen (vgl. Abschnitt 6.5).
- Bei der Wahl der Gewichte der zusätzlichen Beobachtungen ist sorgsam vorzugehen → kritische Analyse des Ausgleichsergebnisses erforderlich.



6. Mehrbildorientierung

6.2 Mathematisches Basismodell

Gestalten:

Eine weitere Gruppe von Beobachtungen betrifft die sogenannten Gestalten. Sie werden – in der Regel – mit keinem Instrument beobachtet, sondern allein mit den menschlichen Sinnen und gesammelten Wissen wahrgenommen. Typische Gestalten sind (vgl. Abb.):

Zwei und mehr Punkte

- in einer Horizontalebene (z.B. P_1P_2 oder $P_9P_{11}P_{13}$),
- entlang einer Vertikalen (z.B. $P_{11}P_{14}$ oder P_1P_3),

drei und mehr Punkte

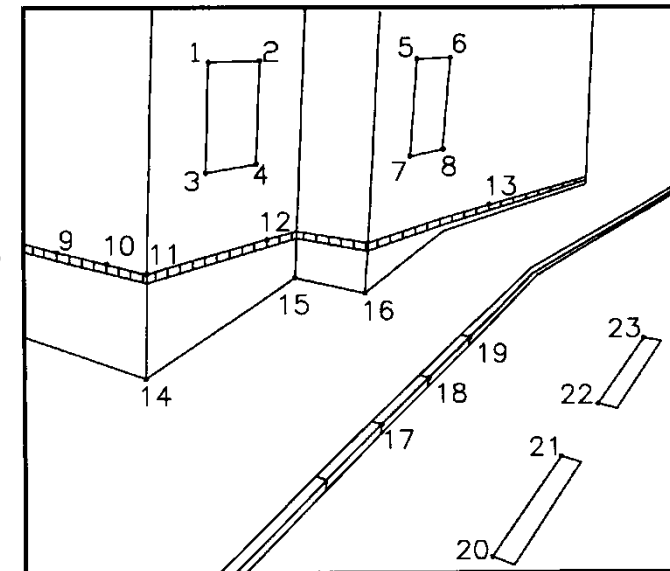
- entlang einer beliebigen Geraden (z.B. Gesteigkante einer geneigten Straße mit $P_{17}P_{18}P_{19}$),
- in einer Vertikalebene (z.B. $P_9P_{11}P_{14}$ oder $P_1P_2P_3P_4$),
- in zwei orthogonalen Vertikalebene mit einem der drei Punkte auf der Kante (z.B. $P_9P_{11}P_1$),

vier und mehr Punkte

- in einer beliebigen Ebene (z.B. geneigte Straßenebene mit $P_{14}P_{17}P_{15}P_{19}$),
- auf parallelen Geraden (z.B. mit $P_{17}P_{19}$ auf der einen Geraden und $P_{20}P_{23}$ auf der dazu parallelen Geraden),
- in parallelen Vertikalebene (z.B. versetzte Fassadenebenen mit $P_1P_2P_3P_4$ in der einen Ebene und $P_5P_6P_7P_8$ in der dazu parallelen Ebene),

fünf und mehr Punkte

- in parallelen Ebenen (z.B. mit $P_{14}P_{15}P_{17}$ in der einen Ebene und $P_{20}P_{23}$ in der dazu parallelen Ebene, usw.



Gestaltinformationen
(K. Kraus, 1996)

Eine Verfeinerung besteht darin, anstelle von Geraden räumliche Kurven und anstelle von Ebenen räumliche Flächen zu verwenden. Mit solchen räumlichen Kurven und Flächen können sehr allgemeine Beziehungen zwischen (Objekt-)Punkten berücksichtigt werden. Die Beobachtungen, die zu einer Gestalt führen, werden als **fiktive Beobachtungen** bezeichnet.

Kategorien von Parametern:

- freie Parameter:** gesuchte Unbekannte wie z.B. X_i (Neupunkte), X_0 , R , und c , x_0 , y_0 .
- feste Parameter:** Konstante, die sich durch die Ausgleichung nicht ändern dürfen.

Beobachtung + Verbesserung = f (freie + feste Parameter)



6. Mehrbildorientierung

6.3 Zusätzliche Parameter

Durch die Einführung von zusätzlichen Parametern in die Abbildungsgleichungen der Zentralprojektion können verbliebene systematische Abbildungsfehler kompensiert werden.

Physikalische Realität weicht mehr oder weniger von der mathematischen Modellvorstellung ab.
 ⇒ strenge Kollinearität ist aufgehoben!

Die zusätzlich einzuführenden freien Parameter verbessern das funktionale Modell.

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} + \Delta x \\
 y &= y_0 - c \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{j}}{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{k}} + \Delta y
 \end{aligned}$$

erweiterte Kollinearitätsgleichungen
 (extended collinearity equations)

Physikalische Modell (*Physical additional parameter (AP) model*)
 → vgl. Abschnitt 1.1

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta x &= \Delta x_{\text{rad}} + \Delta x_{\text{tan}} + \Delta x_{\text{u}} + \Delta x_{\text{aff}} \\
 \Delta y &= \Delta y_{\text{rad}} + \Delta y_{\text{tan}} + \Delta y_{\text{u}} + \Delta y_{\text{aff}}
 \end{aligned} \right\} \dots \text{Bildfehler}$$

①
②
③
④

ad ① Radial-symmetrische Verzeichnung (*symmetric lens distortion*)

$$\begin{aligned}
 \Delta r_{\text{rad}} &= K_1 \cdot r^3 + K_2 \cdot r^5 + K_3 \cdot r^7 + \dots \\
 \Delta x_{\text{rad}} &= \bar{x} \cdot \frac{\Delta r_{\text{rad}}}{r} & \Delta y_{\text{rad}} &= \bar{y} \cdot \frac{\Delta r_{\text{rad}}}{r}
 \end{aligned}$$

ad ② Radial-asymmetrische und tangentiale Verzeichnung
 (tangential lens distortion)

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{\text{tan}} &= P_1 \cdot (r^2 + 2\bar{x}^2) + 2P_2 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \\
 \Delta y_{\text{tan}} &= P_2 \cdot (r^2 + 2\bar{y}^2) + 2P_1 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}
 \end{aligned}$$

ad ③ Filmunebeneheit (*out-of-plane distortion*)

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_{\text{u}} \\ \Delta y_{\text{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{x}/r \\ \bar{y}/r \end{Bmatrix} \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} \cdot \bar{x}^{(i-j)} \bar{y}^j$$

ad ④ Affinität und Scherung (*in-plane-distortion*)

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{\text{aff}} &= a \cdot \bar{x} + b \cdot \bar{y} & a \approx 0, b \approx 0 \\
 \Delta y_{\text{aff}} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

a ... Maßstabsunterschied
 b ... Scherung



6. Mehrbildorientierung

6.3.1 The combined physical model

$$\Delta x = x_0 + \frac{\bar{x}}{c} dc + \bar{x}r^2 K_1 + \bar{x}r^4 K_2 + \bar{x}r^6 K_3 + (r^2 + 2\bar{x}^2)P_1 + 2P_2 \bar{x}\bar{y} + a\bar{x} + b\bar{y}$$

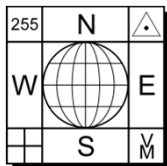
$$\Delta y = y_0 + \frac{\bar{y}}{c} dc + \bar{y}r^2 K_1 + \bar{y}r^4 K_2 + \bar{y}r^6 K_3 + 2P_1 \bar{x}\bar{y} + (r^2 + 2\bar{y}^2)P_2$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\bar{x}}{c} & \bar{x}r^2 & \bar{x}r^4 & \bar{x}r^6 & (3\bar{x}^2 + \bar{y}^2) & 2\bar{x}\bar{y} & \bar{x} & \bar{y} \\ 0 & 1 & \frac{\bar{y}}{c} & \bar{y}r^2 & \bar{y}r^4 & \bar{y}r^6 & 2\bar{x}\bar{y} & (3\bar{y}^2 + \bar{x}^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ dc \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ P_1 \\ P_2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Allgemein spricht man von **Simultankalibrierung**, wenn die Parameter im Rahmen einer Bündelausgleichung bestimmt werden. Werden ausschließlich photogrammetrische Beobachtungen (Bildkoordinaten) eingesetzt, wird auch der Begriff **Selbstkalibrierung** verwendet.

Anmerkungen:

- K_i sind miteinander stark korreliert. Da die K_i -Werte mit den Elementen der EO und mit den anderen AP wenig korreliert sind, wirkt sich eine etwaige Überparametrisierung wenig auf die numerische Stabilität aus.
- Mit den K_i der radial-symmetrischen Verzeichnung wird auch großteils der Einfluss der unmodellierten atmosphärischen Refraktion berücksichtigt.
- Wegen Überparametrisierung sind beim affinen Korrekturanteil nur 2 DOF (Maßstabsunterschied und Scherung) notwendig.
- Starke Korrelationen von P_1, P_2 mit x_0, y_0
- $\Delta x_{\tan}, \Delta y_{\tan} \ll \Delta x_{\text{rad}}, \Delta y_{\text{rad}}$
- Vorzeichenkonventionen (Verzeichnungskorrektur, etc.) beachten!
- Iterative Korrektur der Abbildungsfehler bei der Objektrekonstruktion ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$), da die Parameter in Funktion der fehlerfreien Bildkoordinaten definiert sind.
- In der Computer Vision werden die zusätzlichen Parameter i. Allg. in Funktion der gemessenen Bildkoordinaten angesetzt. Das bedeutet diesbezüglich, dass keine iterative Berechnung der Abbildungsfehler für den Fall ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$) notwendig ist. Sehr wohl muss aber bei der Abbildung eines Objektpunktes in den Bildraum ($\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$) iteriert werden.



6. Mehrbildorientierung

6.3.2 Empirical AP models

Zur Kompensation der systematischen Fehler in der Aerotriangulation hat der Ansatz von H. Ebner (1976) große Bedeutung erlangt.

Die 12 zusätzlichen Parameter sind untereinander und zu den Parametern der äußeren Orientierung der Bilder weitgehend orthogonal.

Ebner-Model:

$$\Delta x = b_1x + b_2y - b_3(2x^2 - \frac{4b^2}{3}) + b_4xy + b_5(y^2 - \frac{2b^2}{3}) + b_7x(y^2 - \frac{2b^2}{3}) + b_9y(x^2 - \frac{2b^2}{3}) + b_{11}(x^2 - \frac{2b^2}{3})(y^2 - \frac{2b^2}{3})$$

12 Parameter

$$\Delta y = -b_1y + b_2x + b_3xy - b_4(2y^2 - \frac{4b^2}{3}) + b_6(x^2 - \frac{2b^2}{3}) + b_8y(x^2 - \frac{2b^2}{3}) + b_{10}x(y^2 - \frac{2b^2}{3}) + b_{12}(x^2 - \frac{2b^2}{3})(y^2 - \frac{2b^2}{3})$$

b ... Basis im Bild ($\cong 90$ mm bei $l = 60\%$)

Alternative Ansätze basieren auf bis zu 44 zusätzlichen Parametern.

Mixed AP Model (C. Brown, 1976):

Kombination zwischen dem physikalisch begründeten Ansatz (ohne Maßstabsunterschied und Scherung) und weiteren Parametern.

$$\Delta x = a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + \frac{x}{c}(c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x^3 + c_5x^2y + c_6xy^2 + c_7y^3) + x(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + P_1(y^2 + 3x^2) + 2P_2xy + x_0 + \frac{x}{c}dc$$

29 Parameter

$$\Delta y = b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^2y + b_7xy^2 + \frac{y}{c}(c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x^3 + c_5x^2y + c_6xy^2 + c_7y^3) + y(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + 2P_1xy + P_2(x^2 + 3y^2) + y_0 + \frac{y}{c}dc$$

Der dargestellte Ansatz wurde ursprünglich in der Aerotriangulation eingeführt, kann aber auch in der filmbasierten Nahbereichsphotogrammetrie eingesetzt werden.

($a_1 \dots a_7$), ($b_1 \dots b_7$) ... Filmdeformation (*in-plane image distortion*)

($c_1 \dots c_7$) ... Parameter zur Beschreibung der Filmunebenheit (*out of-plane or unflatness effects*)

Modell nach Kruck: 30 Parameter; die Auswahl der Parameter hat mit entsprechender Sorgfalt zu erfolgen (Handbücher konsultieren!).

Diverse andere Modelle, z.B.:

Bauer's Simple Model: 3 Parameter

$$\Delta x = a_1x(r^2 - r_0^2) + a_2x$$

$$\Delta y = a_1y(r^2 - r_0^2) - a_2y + a_3x$$

Jacobsen's Simple Model: 4 Parameter

$$\Delta x = a_1x(r^2 - r_0^2) + a_2x + a_3y$$

$$\Delta y = a_1y(r^2 - r_0^2) - a_3x + a_4x^2$$

(Nullstelle bei r_0)

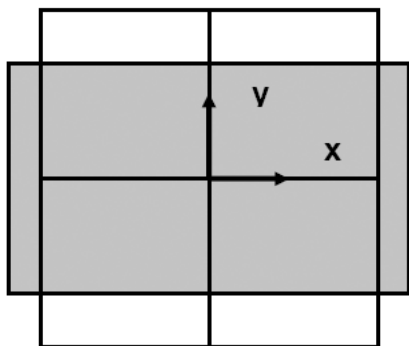


6. Mehrbildorientierung

6.3.2 Empirical AP models

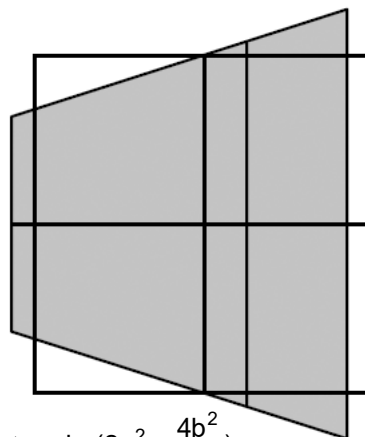
H. Ebner, 1976: Self Calibrating Block Adjustment. Bildmessung und Luftbildwesen, 44(4):128-139.

12-parameter Ebner model



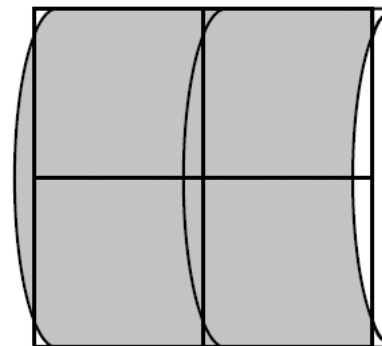
$$\Delta x = b_1 x$$

$$\Delta y = -b_1 y$$



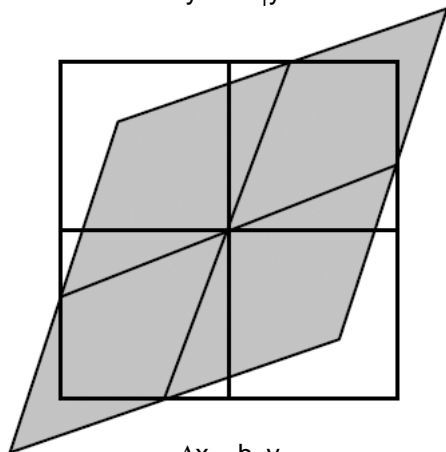
$$\Delta x = b_3 \left(2x^2 - \frac{4b^2}{3} \right)$$

$$\Delta y = b_3 xy$$



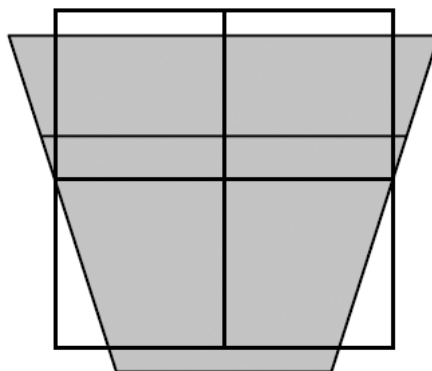
$$\Delta x = b_5 \left(y^2 - \frac{2b^2}{3} \right)$$

$$\Delta y = 0$$



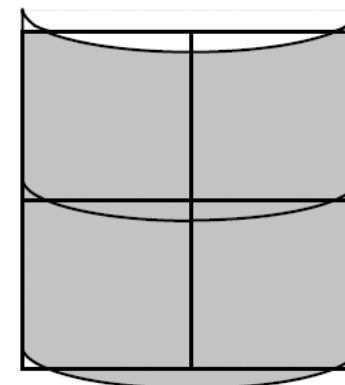
$$\Delta x = b_2 y$$

$$\Delta y = b_2 x$$



$$\Delta x = b_4 xy$$

$$\Delta y = b_4 \left(2y^2 - \frac{4b^2}{3} \right)$$



$$\Delta x = 0$$

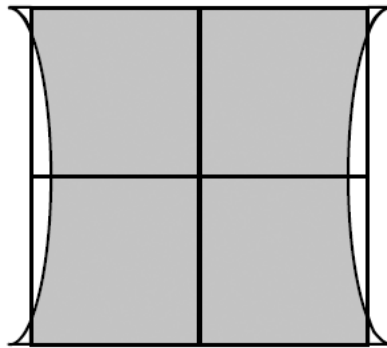
$$\Delta y = b_6 \left(x^2 - \frac{2b^2}{3} \right)$$



6. Mehrbildorientierung

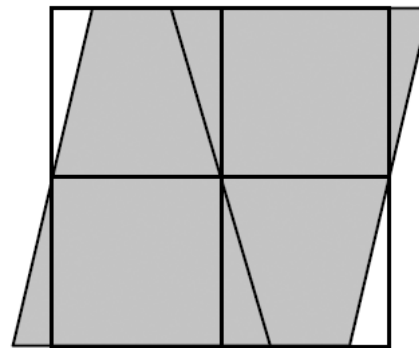
6.3.2 Empirical AP models

12-parameter Ebner model (cont.)



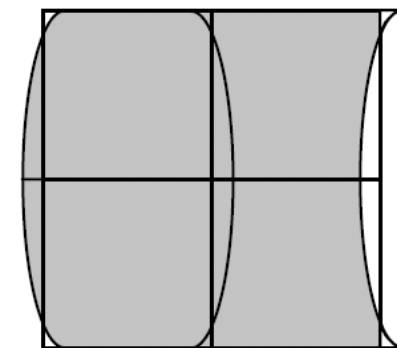
$$\Delta x = b_7 x \left(y^2 - \frac{2b^2}{3} \right)$$

$$\Delta y = 0$$



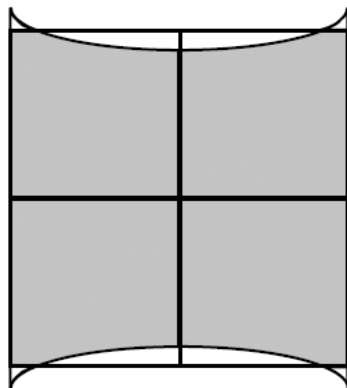
$$\Delta x = b_9 y \left(x^2 - \frac{2b^2}{3} \right)$$

$$\Delta y = 0$$



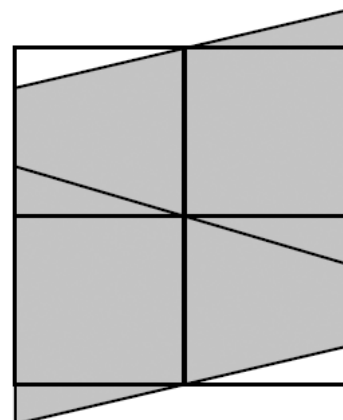
$$\Delta x = b_{11} \left(x^2 - \frac{2b^2}{3} \right) \left(y^2 - \frac{2b^2}{3} \right)$$

$$\Delta y = 0$$



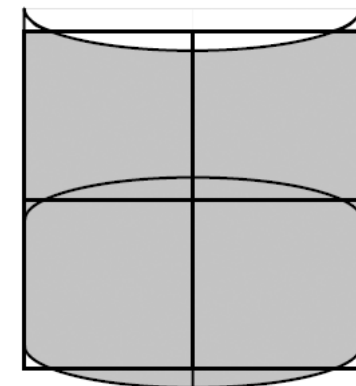
$$\Delta x = 0$$

$$\Delta y = b_8 y \left(x^2 - \frac{2b^2}{3} \right)$$



$$\Delta x = 0$$

$$\Delta y = b_{10} x \left(y^2 - \frac{2b^2}{3} \right)$$



$$\Delta x = 0$$

$$\Delta y = b_{12} \left(x^2 - \frac{2b^2}{3} \right) \left(y^2 - \frac{2b^2}{3} \right)$$

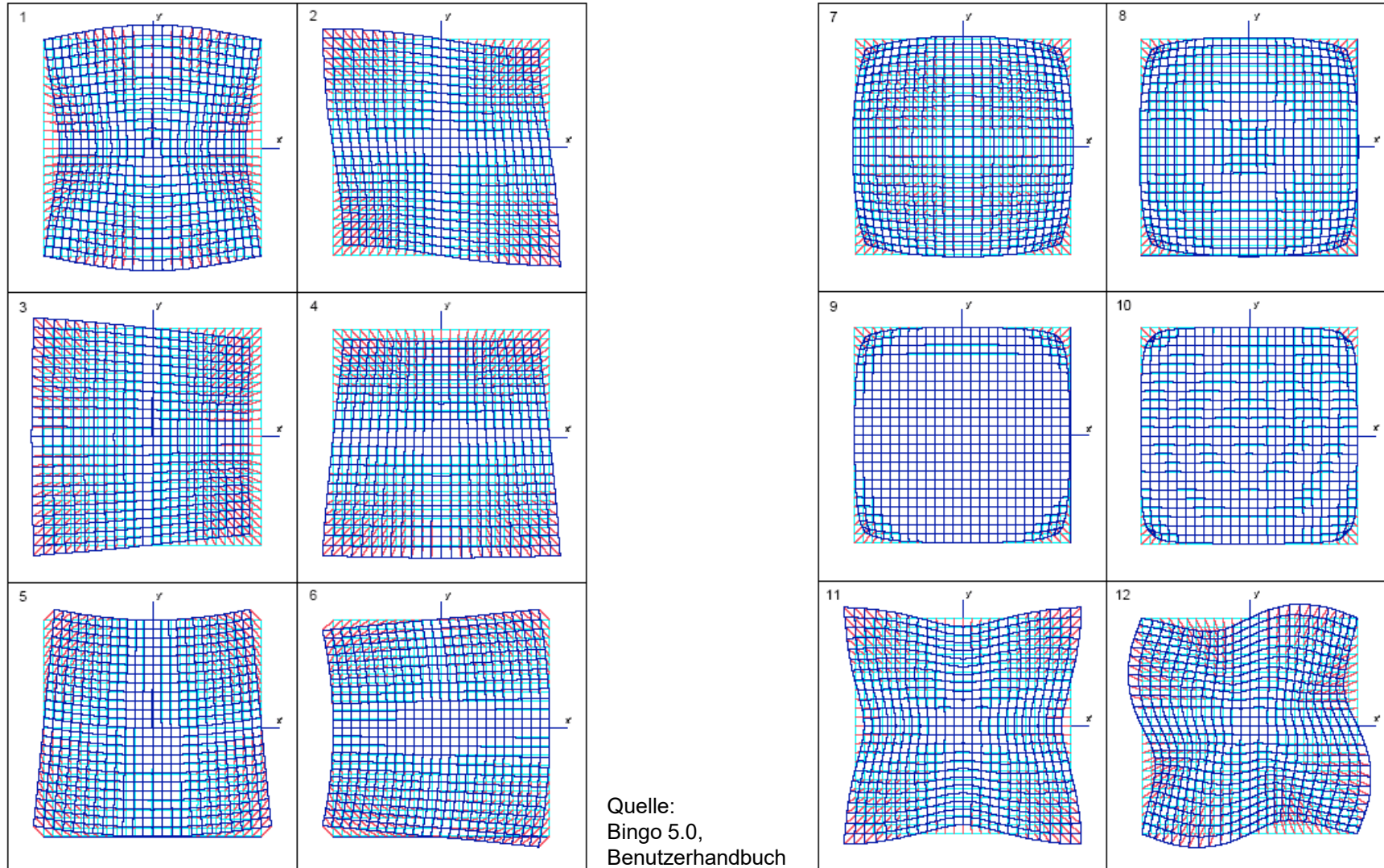


6. Mehrbildorientierung

6.3.2 Empirical AP models



30-parameter Kruck model (cont.)



Quelle:
Bingo 5.0,
Benutzerhandbuch

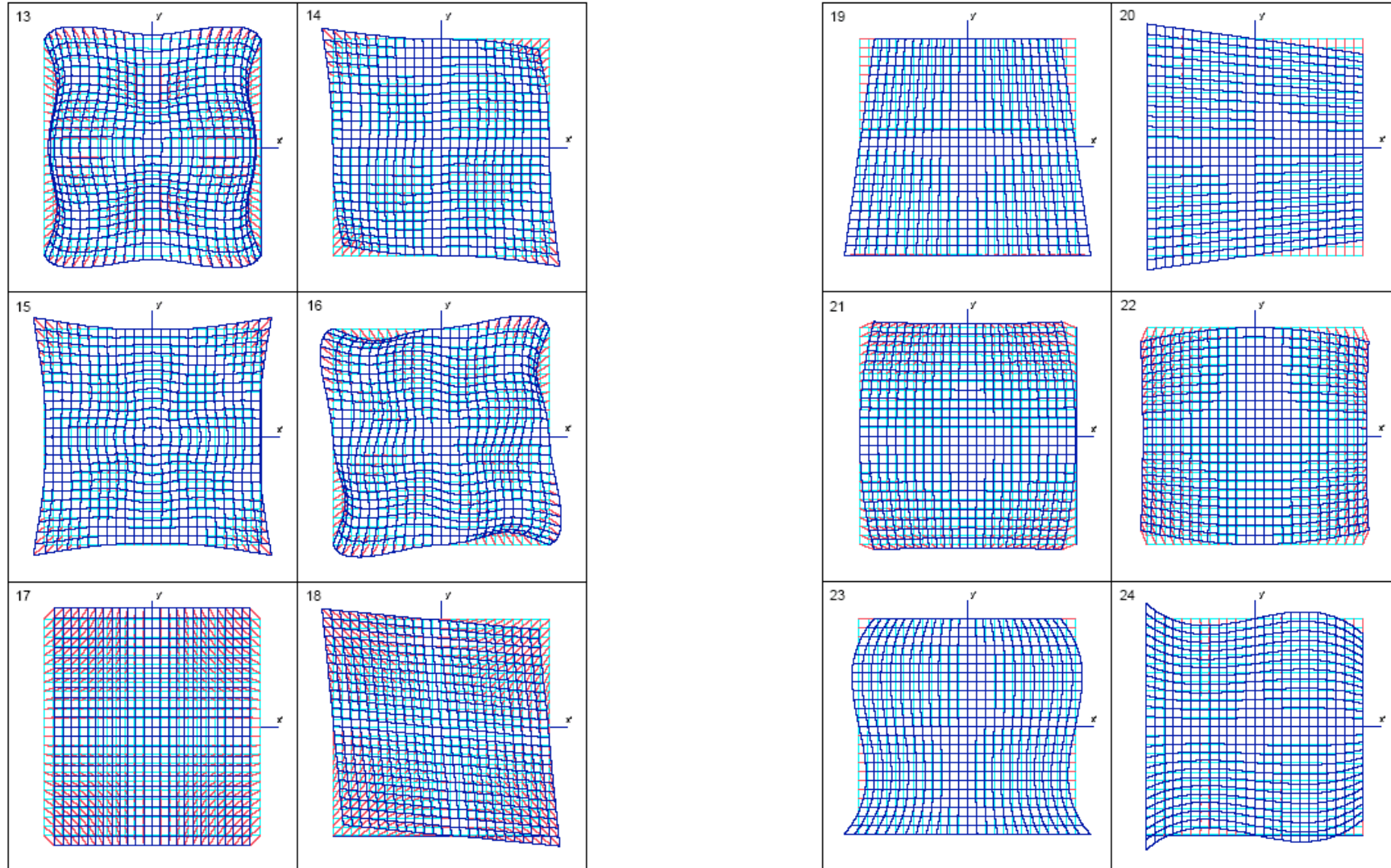


6. Mehrbildorientierung

6.3.2 Empirical AP models



30-parameter Kruck model (cont.)



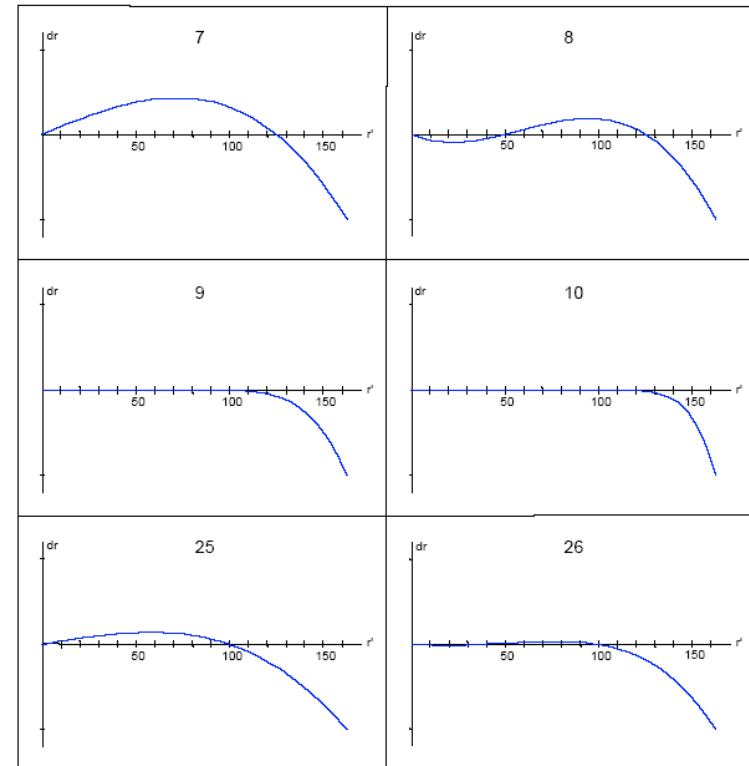
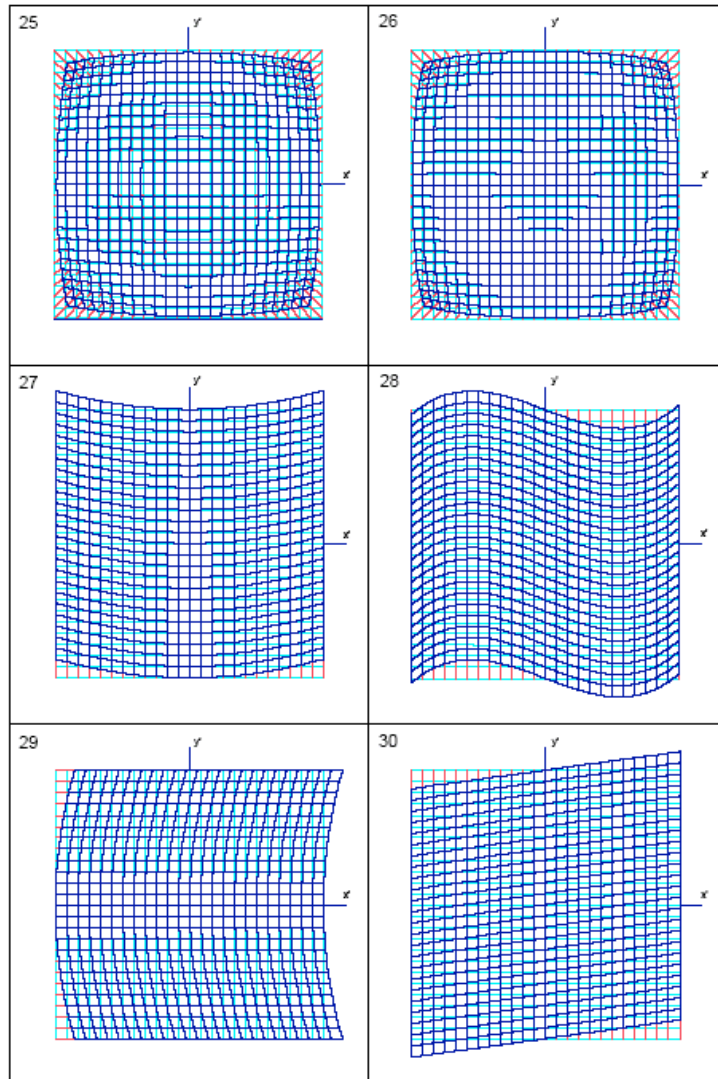


6. Mehrbildorientierung

6.3.2 Empirical AP models



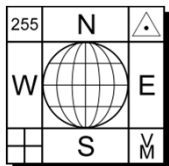
30-parameter Kruck model (cont.)



Radialsymmetrische Effekte der zusätzlichen Parameter

Neuere Ansätze der Modellierung:

R. Tang, 2012: A Rigorous and flexible calibration method for digital airborne camera systems. Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci., XXXIX-B1, 153-158, doi:10.5194/isprsarchives-XXXIX-B1-153-2012, 2012.



6. Mehrbildorientierung

6.3.3 Korrelationstest, Signifikanztest, Innere Bestimmtheit



Die Auswahl der Parameter geschieht meist programmgesteuert. Der Benutzer kann zunächst alle Parameter ansetzen, vom Programm wird dann iterativ ermittelt, welche Parameter überflüssig sind. Die überflüssigen Parameter nehmen in der nächsten Iteration nicht mehr an der Ausgleichung teil (vgl. Bingo 5.0).

Die zusätzlichen Parameter sollen erst dann in die Ausgleichung eingeführt werden, wenn

- alle groben Fehler im Block beseitigt sind und
- für alle Bild- und Punktunbekannten gute Näherungen zur Verfügung stehen.

Damit soll eine irrtümliche Eliminierung von Parametern vermieden werden.

■ Analyse der Korrelationen zwischen den freien Parametern (Korrelationstest)

Die zusätzlichen Parameter können untereinander stark korreliert sein, aber auch mit den unbekanntem Orientierungsparametern der Bündelblockausgleichung können große Korrelationen auftreten.

Der Korrelationskoeffizient r_{ij} kann aus den entsprechenden Elementen der Gewichtskoeffizientenmatrix \mathbf{Q}_{xx} ($=\mathbf{N}^{-1}$) berechnet werden:

$$r_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}}$$

Prinzip:

Sind zwei zusätzliche Parameter untereinander mit einem Korrelationskoeffizienten von z.B. > 0.8 korreliert, so sind diese Parameter nicht unabhängig. Einer der beiden Parameter kann daher entfallen.

Verfahren:

Aus allen Korrelationskoeffizienten > 0.8 wird der größte herausgesucht. Einen Löschvermerk erhält dann derjenige der beiden Parameter, der den kleineren Parameterwert hat. Dieser Test wird jeweils nur zwischen solchen Parametern durchgeführt, die noch keinen Löschvermerk haben (vgl. Bingo 5.0).



6. Mehrbildorientierung

6.3.3 Korrelationstest, Signifikanztest, Innere Bestimmtheit



■ Signifikanztest

Als Testgröße wird der Quotient aus dem Parameterwert und der zugehörigen Standardabweichung berechnet:

$$t_i = \frac{\hat{b}_i}{\hat{\sigma}_i} = \frac{\hat{b}_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{ii}}} = \frac{\hat{b}_i}{\sqrt{\frac{v^T v}{n-u}} \sqrt{q_{ii}}} \quad t_i \dots \text{ Student'sche Funktion}$$

Statistischer Signifikanztest auf der Grundlage der Student- bzw. t-Teilung (vgl. VO "Parameterschätzung")

Falls der Gewichtseinheitsfehler σ_0 aus langen Erfahrungen vorgegeben werden kann, ist an Stelle der t-Verteilung die Normalverteilung heranzuziehen.

Nullhypothese: Der zusätzliche Parameter \hat{b}_i ist nicht signifikant.

Alternative Hypothese: Der zusätzliche Parameter \hat{b}_i ist signifikant.

Verfahren:

Ein Parameter mit einer Testgröße von z.B. < 1.2 erhält einen Löschermerk, es sei denn, er ist mit einem anderen zusätzlichen Parameter, der bereits einen Löschermerk hat, mit einem Koeffizienten > 0.3 korreliert. In diesem Fall wird auf einen Löschermerk verzichtet, weil in der nächsten Iteration ein größerer Parameterwert erwartet werden kann (vgl. Bingo 5.0).



6. Mehrbildorientierung

6.3.3 Korrelationstest, Signifikanztest, Innere Bestimmtheit



■ Innere Bestimmtheit

Prinzip:

Die innere Bestimmtheit gibt an, wie weit ein Parameter durch die Gruppe der anderen Parameter ersetzt werden kann und damit überflüssig ist:

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} - [\text{diag}(\mathbf{N}) \cdot \text{diag}(\mathbf{N}^{-1})]^{-1}$$

mit \mathbf{B} ... Koeffizienten der inneren Bestimmtheit (Diagonalmatrix) $0 \leq b_{ii} \leq 1$

\mathbf{E} ... Einheitsmatrix

\mathbf{N} ... Normalgleichungsmatrix; $\text{diag}(\mathbf{N})$... Diagonale der Normalgleichungsmatrix

$b_{ii} = 0 \Rightarrow \mathbf{N}$ ist eine Diagonalmatrix

$b_{ii} = 1 \Rightarrow \mathbf{N}$ ist singulär

Die einzelnen b_{ii} sollen den Wert 0.99 nicht übersteigen.

Verfahren:

Falls nach dem Korrelations- und Signifikanztest noch kein Parameter einen Löscherk erhalten hat, wird geprüft, ob es Parameter gibt, bei denen die innere Bestimmtheit > 0.9 ist. Wenn ja, erhält der Parameter mit der größten inneren Bestimmtheit einen Löscherk (vgl. Bingo 5.0).

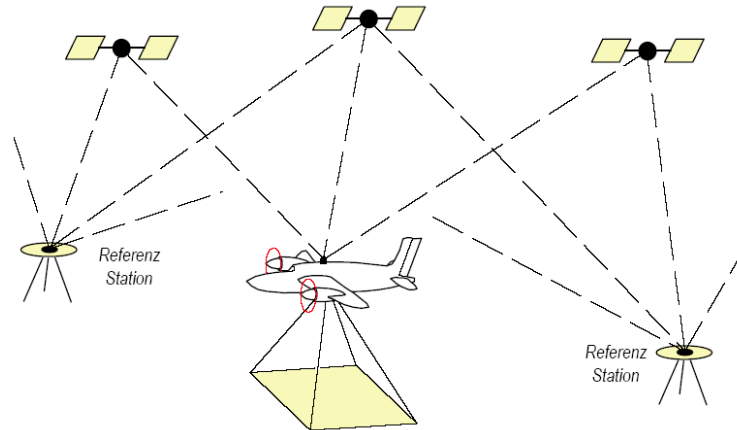
Der Auswahlprozess ist dann abgeschlossen, wenn in einer Iteration kein Parameter mehr einen Löscherk erhält.



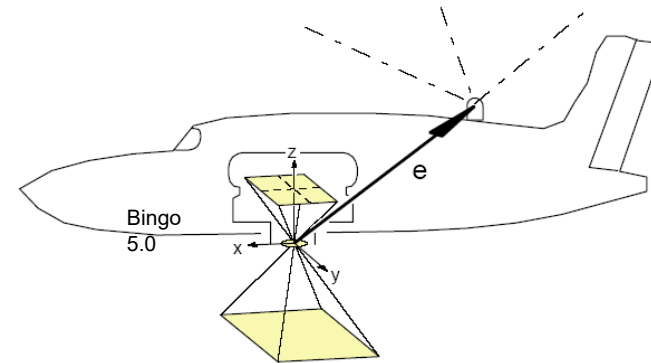
6. Mehrbildorientierung

6.4 GPS-gestützte Aerotriangulation

Während eines Bildfluges können die Aufnahmeorte mit einem **Global Positioning System (GPS)** bestimmt werden. (→ Kinematische GPS-Positionierung). Die mit einem solchen System ermittelten Koordinaten beziehen sich dabei zunächst auf die GPS-Antenne auf dem Flugzeugdach.



Bildflug mit GPS-Aufzeichnung



Exzentrizitätsvektor

$$\mathbf{X}_A = \mathbf{X}_0 + \mathbf{R}\mathbf{e} \quad \text{GPS constant antenna offset equation}$$

$$\mathbf{X}_A = (X_A, Y_A, Z_A)^T \quad \dots \text{ Antennenzentrum}$$

$$\mathbf{X}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)^T \quad \dots \text{ objektseitiges Projektionszentrum}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\omega, \varphi, \kappa) \quad \dots \text{ Drehmatrix}$$

$$\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)^T \quad \dots \text{ Exzentrizitätsvektor}$$

Der Exzentrizitätsvektor \mathbf{e} ist im Bildraum definiert. Er zeigt vom objektseitigen Projektionszentrum des Bildes zur GPS-Antenne.

Der Wert der Vektorkomponenten ist in der Maßeinheit des Objektraumes anzugeben.

Zur Ermittlung der Vektorkomponenten wird die Antenne zunächst in Bezug auf den Anlegerahmen der Kamera genau vermessen. Anschließend ist der Abstand vom Anlegerahmen bis zum objektseitigen Projektionszentrum zur Komponente e_z zu addieren. Dieser Abstand stimmt nicht mit der Brennweite der Kamera überein (vgl. Abschnitt 1.1) und ist dem Kamerahandbuch zu entnehmen. Für die unterschiedlichen Filter gibt es zusätzliche Korrekturen!

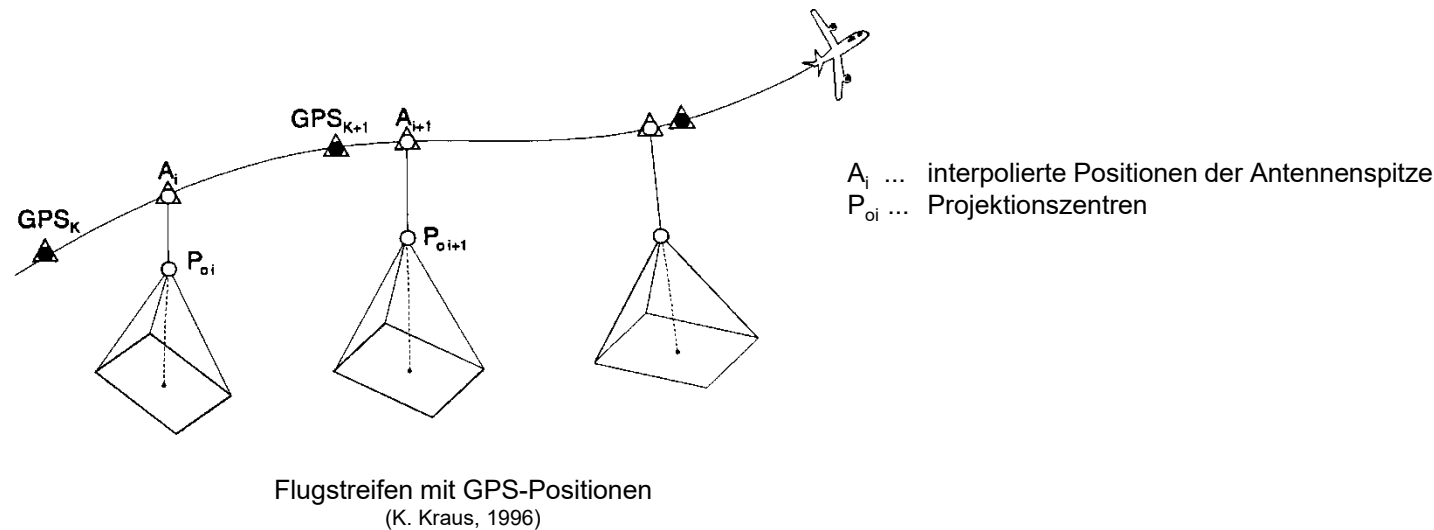


6. Mehrbildorientierung

6.4 GPS-gestützte Aerotriangulation

Die Positionen der Antenne im Bezug zum Kamerakoordinatensystem muss – zumindest bei großmaßstäbigen Bildflügen – während des gesamten Bildfluges unverändert bleiben bzw. bestimmbar sein.

- Nach der Bestimmung des Antennenzenrums im Kamerakoordinatensystem darf während des gesamten Bildfluges die Längs- und Querneigung und insbesondere die Verkantung der Kamera nicht mehr nachgestellt werden. (Kreiselstabilisierte Aufhängungen der Kameras widersprechen dieser Bedingung!)
- Falls man auf die Verkantung während des Fluges nicht verzichten kann, muss die Antenne in Verlängerung der Aufnahmeichtung (vgl. nächste Abb.) montiert werden.
- Falls man die Antenne oben am Flugzeugschwanz montieren will und auch Verdrehungen der Kamera während des Fluges erfolgen sollen, müssen diese Verdrehungen registriert und daraus die für jede Messaufnahme aktuellen Positionen des Antennenzenrums im Kamerakoordinatensystem ermittelt werden.



A_i ... interpolierte Positionen der Antennenspitze
 P_{oi} ... Projektionszentren

Der Vektor \mathbf{e} wird in der Bildtriangulation meist als Unbekannte eingeführt. Die Genauigkeit der GPS-Koordinaten wird über eine a priori Standardabweichung festgelegt.

Die genauen (relativen) Flugzeugpositionen werden aus den GPS-Beobachtungen etwa in Sekundenintervallen ermittelt. Durch Interpolation entlang der räumlichen Kurve berechnet man die Koordinaten der Antennenpunkte A_i zu den einzelnen Belichtungszeiten. Die Synchronisation der Auslösezeitpunkte erfolgt auf 1 ms genau.



6. Mehrbildorientierung

6.4 GPS-gestützte Aerotriangulation

Shift- und Driftparameter

Wenn sich bei der Bündeltriangulation herausstellt, dass die verwendeten GPS-Koordinaten systematisch verfälscht sind, oder wenn eine sichere Lösung der Phasenmehrdeutigkeit nicht möglich war, so dass willkürliche Festsetzungen getroffen werden mussten, dann können Shift- und Driftparameter zur Korrektur eingesetzt werden.

$$\bar{\mathbf{X}}_A = \mathbf{X}_A + \underbrace{\mathbf{X}_S}_{\text{kons tan ter Anteil}} + t \cdot \underbrace{\mathbf{X}_D}_{\text{linearer Anteil}} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{X}_S \dots \text{Shift} \\ \mathbf{X}_D \dots \text{Drift} \\ t \dots \text{Zeit} \end{array} \right\} \text{Unbekannte der Ausgleichung}$$

Die Wahl, welche Parameter für welche Blockteile, Streifen bzw. Teilstreifen eingesetzt werden, bleibt dem Anwender überlassen. Beurteilungskriterien sind daher hauptsächlich die verbleibenden Systematiken der Residuen der GPS-Koordinaten.

Die bekannten Nachteile der Verwendung von Shift- und Driftparametern kann durch die sog. kombinierte Phasenmehrdeutigkeitslösung (CPAS) umgangen werden. Hier werden die Phasenmehrdeutigkeiten im Zuge der Bündelausgleichung bestimmt (vgl. Bingo 5.0).

CPAS ... Combined Phase Ambiguity Solution



- ▲ Lagepasspunkt
- Höhenpasspunkt

Anmerkung: Bei GPS-gestützten Blöcken reichen vier Passpunkte in den Blockecken aus. Querstreifen am Anfang und Ende des Blocks dienen zur besseren Stabilisierung (Detektion von Cycle Slips) des Blocks.

Im Falle von CAPS kann auf die Querstreifen verzichtet werden.

Wird die Stellung der Sensorplattform mit einem Inertialnavigationssystem gemessen, so können diese Messwerte direkt in die Bildtriangulation einfließen (vgl. Kapitel 7):

$$\begin{aligned} \omega_{INS} &= \omega_0 + \omega_{Shift} + t \cdot \omega_{Drift} \\ \varphi_{INS} &= \varphi_0 + \varphi_{Shift} + t \cdot \varphi_{Drift} \\ \kappa_{INS} &= \kappa_0 + \kappa_{Shift} + t \cdot \kappa_{Drift} \end{aligned}$$



6. Mehrbildorientierung

6.5 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen



Beobachtungen: Bildkoordinaten

Objektkoordinaten (Index 1)

Parameter der äußeren Orientierung (Index 2)

Parameter der inneren Orientierung und/oder zusätzliche Parameter (Index 3)

"GPS Shift- und Drift"-Parameter (Index 4)

"INS Shift- und Drift"-Parameter (Index 5)

Alle Parameter werden als beobachtete Größen eingeführt.

Unbekannte: Parameter der äußeren Orientierung

Objektkoordinaten

Parameter der inneren Orientierung und/oder zusätzliche Parameter

"GPS/INS Shift- und Drift"-Parameter

Die nicht-linearen funktionalen Modelle sind mit geeigneten Näherungswerten für die Unbekannten zu linearisieren.

⇒ linearisierte Verbesserungsgleichungen:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_3 \\
 \mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 \\
 \mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 \\
 \mathbf{l}_3 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 \\
 \mathbf{l}_4 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_4 \\
 \mathbf{l}_5 + \mathbf{v}_5 = \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_5
 \end{array}
 \quad
 \left|
 \begin{array}{l}
 \mathbf{P} = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\
 \mathbf{P}_1 = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} \\
 \mathbf{P}_2 = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} \\
 \mathbf{P}_3 = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_3^{-1} \\
 \mathbf{P}_4 = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_4^{-1} \\
 \mathbf{P}_5 = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_5^{-1}
 \end{array}
 \right.
 \quad
 \begin{array}{l}
 \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A} \partial \mathbf{x}
 \end{array}$$

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad | \quad \mathbf{P}$$

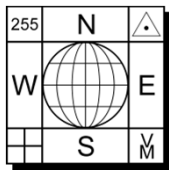
\mathbf{l} ... Vektor der (gekürzten Beobachtungen): $\mathbf{l} = \mathbf{l}_{\text{gemessen}} - (\mathbf{l})_{\text{aus Näherungswerten gerechnet}}$

\mathbf{v} ... Vektor der Verbesserungen

\mathbf{A} ... Designmatrix (partielle Ableitungen des math. Modells nach den Unbekannten)

\mathbf{P} ... Gewichtsmatrix

σ_0 ... a priori Gewichtseinheitsfehler



6. Mehrbildorientierung

6.5 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate (L_2 -Norm):

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad \dots \text{Normalgleichungen}$$

$$\mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{n} \quad \mathbf{N} \dots \text{Normalgleichungsmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} = [\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{E}] \mathbf{l}$$

$$\sum \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4^T \mathbf{P}_4 \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5^T \mathbf{P}_5 \mathbf{v}_5$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = \frac{(\mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{n}^T \mathbf{x})}{r} \quad \dots \text{a posteriori Gewichtseinheitsfehler}$$

n ... Anzahl der Beobachtungen
u ... Anzahl der Unbekannten
r ... Redundanz

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{N}^{-1}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\hat{t}}} = \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{\hat{\hat{t}}} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$$

Iteration der Ausgleichung mit verbesserten Näherungswerten und neu berechneten Differentialquotienten.
Abbruch der Iteration, wenn die Zuschläge zu den Unbekannten klein genug geworden sind,
oder wenn eine maximale Anzahl von Iterationen erreicht wurde.
Als Abbruchkriterium kann auch $|\mathbf{l}^T \mathbf{l} - \mathbf{v}^T \mathbf{v}| < \varepsilon |\mathbf{l}^T \mathbf{l}|$ mit $\varepsilon = 0.0001$ gewählt werden.

Innere und äußere Zuverlässigkeit → vgl. Abschnitt 3.14
Erkennen von Ausreißern (Datenfehlern) → vgl. Abschnitt 3.15
Varianzkomponentenschätzung → vgl. Abschnitt 3.15.4



6. Mehrbildorientierung

6.5.1 Lösung der Normalgleichung

a) Konventionelle Bündelblockausgleichung mit Passpunkten

$$\begin{aligned} \mathbf{I} + \mathbf{v} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 \quad | \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_1 + \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \quad | \mathbf{P}_1 \end{aligned}$$

b) Selbstkalibrierung mit Passpunkten

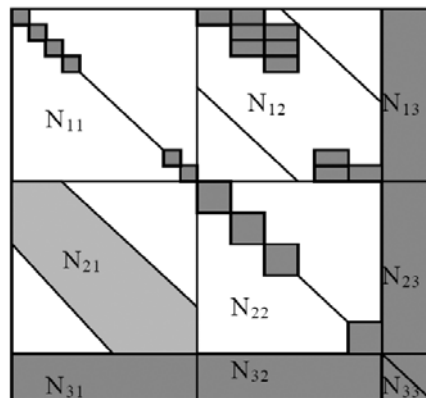
$$\begin{aligned} \mathbf{I} + \mathbf{v} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_3 \quad | \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_1 + \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \quad | \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{I}_3 + \mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 \quad | \mathbf{P}_3 \end{aligned}$$

c) Allgemeine Bündelblockausgleichung

Die Unbekannten \mathbf{x}_3 , \mathbf{x}_4 und \mathbf{x}_5 (innere Orientierung, zusätzliche Parameter, GPS/INS-Parameter) fassen wir zu einer Gruppe zusammen.

⇒ Normalgleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} & \mathbf{N}_{13} \\ \mathbf{N}_{12}^T & \mathbf{N}_{22} & \mathbf{N}_{23} \\ \mathbf{N}_{13}^T & \mathbf{N}_{23}^T & \mathbf{N}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{pmatrix}$$



Struktur der Normalgleichungsmatrix

Diskussion:

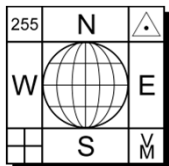
- \mathbf{N}_{11} und \mathbf{N}_{22} sind **Hyperdiagonalmatrizen** mit Submatrizen mit jeweils 3×3 bzw. 6×6 Elementen

→ Beispiel a: Elimination von \mathbf{x}_1 (Passpunkte)

$$(\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12}) \mathbf{x}_2 = \mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{n}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \text{Elemente der äußeren Orientierung}$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1} (\mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \text{"Passpunkte"}$$

- \mathbf{N}_{12} hat in Abhängigkeit der Blockstruktur zahlreiche **Nicht-Null-Elemente**.



6. Mehrbildorientierung

6.5.1 Lösung der Normalgleichung

Diskussion (cont.):

- Typischerweise ergibt sich bei regelmäßigen Luftbildverbänden eine Bandstruktur entlang der Hauptdiagonalen. Die Breite des Bandes und die Anzahl der Nicht-Null-Elemente hängt von den entsprechenden Bildverknüpfungen ab.
- \mathbf{N}_{13} und \mathbf{N}_{23} sind im Allgemeinen voll besetzte Matrizen.

Da i. Allg. nicht mit einer regelmäßigen Anordnung der Bilder, Passpunkte, etc. gerechnet werden kann, ist von einer unregelmäßigen Verteilung der Nicht-Null-Elemente in den Matrizen der Verbesserungs- bzw. Normalgleichungsmatrizen auszugehen.

Solche Matrizen nennt man **Sparse-Matrizen**, weil sie mit Nicht-Null-Elementen sehr **spärlich** (und unregelmäßig) besetzt sind. Der Speicher- und Rechenaufwand für die Lösung eines Normalgleichungssystems mit einer Sparse-Matrix hängt entscheidend davon ab, inwieweit bei der (Cholesky-)Reduktion das Auffüllen mit Nicht-Null-Elementen in engen Grenzen gehalten werden kann und inwieweit die Null-Elemente von numerischen Prozess ferngehalten werden können.

6.5.1.1 Cholesky-Algorithmus

$\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{n}$ Gleichungsauflösung durch Faktorisierung (vgl. VO "Parameterschätzung")

$\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{N}$ \mathbf{C} ... obere Dreiecksmatrix

$\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{n}$

$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{C}^T\mathbf{y} = \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{y}$

$\Rightarrow \mathbf{x}$

$\Rightarrow \mathbf{N}$ bzw. $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}^T)^{-1}$



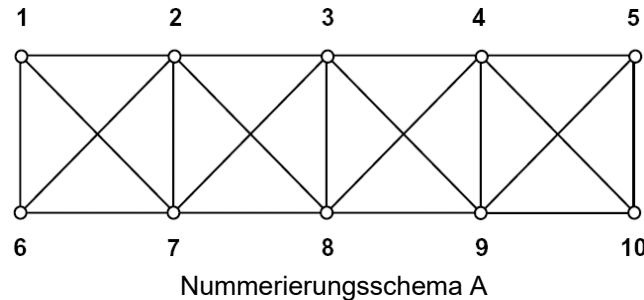
6. Mehrbildorientierung

6.5.2 Profilspeichertechnik

Von der **A**-Matrix wurden zeilenweise nur die von Null verschiedenen Koeffizienten mit den zugehörigen Spaltennummern gespeichert. Die Matrizen **N**, **C** und **N**⁻¹ werden nach der Profilspeichertechnik abgelegt (vgl. Bingo 5.0).

Bei der Profilspeichertechnik wird von jeder Spalte der Teil vom ersten Nicht-Null-Element bis zum Diagonalelement in einem Vektor gespeichert. Alle Spaltenanteile stehen nacheinander in diesem Vektor.

Beispiel (aus dem Manual Bingo 5.0):



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2				10	16			
2		3	4			11	17	23		
3			5	6		12	18	24	30	
4				7	8	13	19	25	31	37
5					9	14	20	26	32	38
6						15	21	27	33	39
7							22	28	34	40
8								29	35	41
9									36	42
10										43

P=43

Normalgleichungsmatrix und Hülle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	×	×				×	×			
2	×	×	×			×	×	×		
3			×	×	×			×	×	×
4				×	×	×			×	×
5					×	×				×
6		×	×			×	×			
7		×	×	×			×	×	×	
8			×	×	×			×	×	×
9				×	×	×			×	×
10					×	×				×

Profil und Speicherschema

Die Menge der gespeicherten Elemente bilden das Profil der Matrix und werden von der Hülle (**Envelope**) eingeschlossen. Es werden also alle Elemente innerhalb dieser Hülle gespeichert, egal ob sie gleich Null oder von Null verschieden sind. Im vorliegenden Beispiel sind also einige Nullen im Profil enthalten.

In der Matrix **C** sind mindestens alle Elemente, die in **N** von Null verschieden sind, ebenfalls mit Nicht-Null-Elementen besetzt. **C** enthält jedoch meistens weit mehr Elemente als **N**, da bei der vorhin erwähnten Faktorisierung weitere Nicht-Null-Elemente entstehen (**Fill-in**). Diese zusätzlichen Elemente liegen jedoch stets innerhalb der Hülle von **N**.

Die Matrizen **N** und **C** haben daher das gleiche Profil. Die Matrix **N**⁻¹ ist dagegen voll besetzt, es werden jedoch nur diejenigen Elemente von **N**⁻¹ berechnet, die in der Hülle der Matrix **N** liegen (Profilinverse), so dass alle drei Matrizen **N**, **C** und **N**⁻¹ in gleicher Weise gespeichert werden können.



6. Mehrbildorientierung

6.5.2 Profilspeichertechnik



cont.

Bereits bei Ausgleichsaufgaben mittlerer Größe reicht der zur Verfügung stehende Kernspeicher nicht aus, die gesamte Profilmatrix aufzunehmen. Sie wird daher in Blöcken aufgeteilt, die jeweils aus einer variablen Anzahl von Spalten bestehen. Diese Blöcke werden zur Verarbeitung wechselweise in den Kernspeicher geladen.

Der für externe Speicherung der Matrizen **A**, **N**, **C** und **N⁻¹** insgesamt benötigte Speicherplatz lässt sich grob als das Vierfache der Profilgröße abschätzen.

Einer der Vorteile der Profilspeichertechnik liegt auch in der Möglichkeit, auf Vektorrechnern und Parallelrechnern die Prozesse "Faktorisierung, Berechnung des Lösungsvektors und Inversion" sehr schnell ausführen zu können.



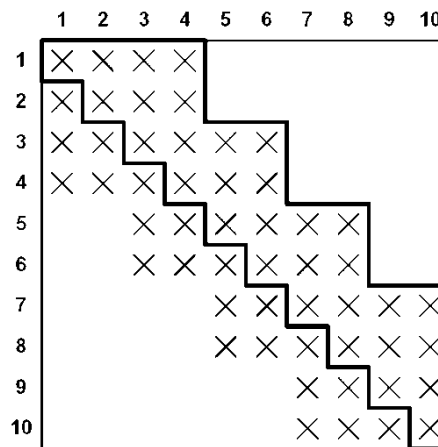
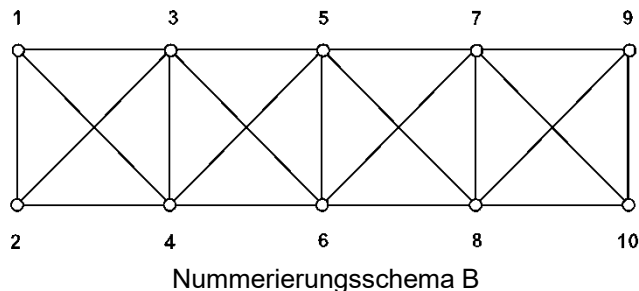
6. Mehrbildorientierung

6.5.3 Profilloptimierung

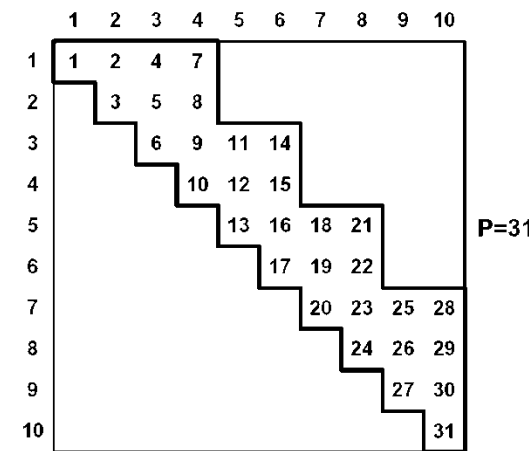
Die Anzahl und die Position der neuen Nicht-Null-Elemente, die während der Faktorisierung in **C** entstehen, sind ausschließlich von der Reihenfolge der Unbekannten abhängig.

Da bei größeren Blöcken die Speicheranforderungen und die Rechenzeiten erheblich sein können, ist die Optimierung des Profils eine wichtige Aufgabe, zumal die Rechenzeit quadratisch mit der Profilgröße zunimmt. Algorithmen siehe Spezialliteratur (vgl. Bingo 5.0).

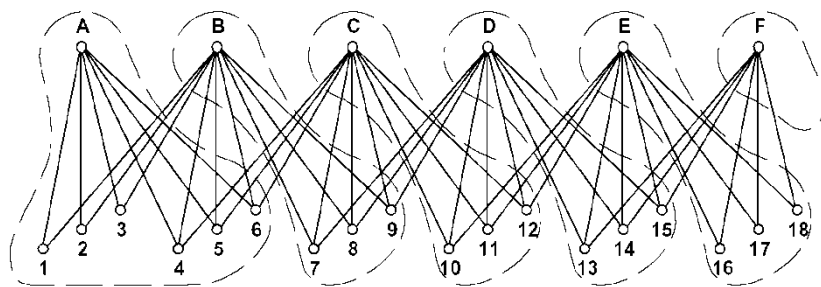
Beispiel cont. (aus dem Manual Bingo 5.0):



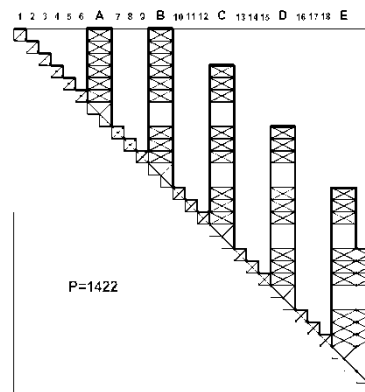
Normalgleichungsmatrix und Hülle



Profil und Speicherschema



Graph eines Bildstreifens



Normalgleichungsmatrix und Hülle des Bildstreifens



6. Mehrbildorientierung

6.6 Datumsfestlegung, 6.6.1 Rang- und Datumsdefekt, 6.6.2 Konfigurationsdefekt

Datumsdefekt vs. Konfigurationsdefekt

6.6.1 Rang- und Datumsdefekt

Ein aus rein photogrammetrischen Beobachtungen aufgebautes Netz führt zu einem singulären Normalgleichungsmatrix, da zwar die Form des Netzes, nicht aber seine absolute Lage und Orientierung im Raum bestimmt werden kann. Das Gleichungssystem besitzt somit den **Rangdefekt**

$$d = u - r$$

mit

u: Anzahl der Unbekannten

r: rang(A)

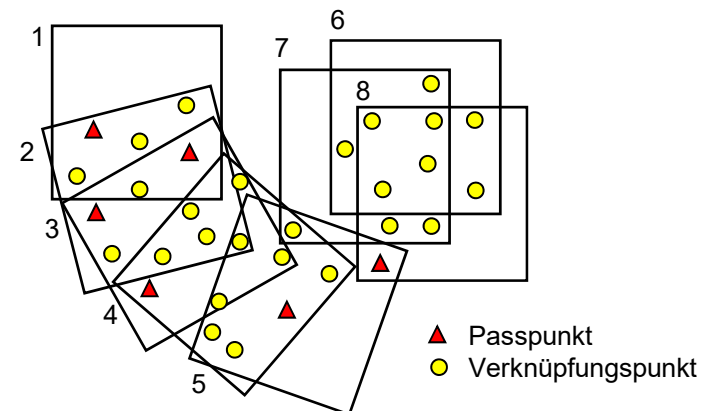
Ursache ist ein **Datumsdefekt** des Beobachtungsnetzes, der bei dreidimensionalen Netzen durch sieben zusätzliche Informationen behoben werden kann:

- 3 Translationen
- 3 Rotationen
- 1 Maßstabsfaktor

Der Datumsdefekt kann dadurch behoben werden, indem bekannte Strecken, Passpunkte mit bekannten Objektkoordinaten und gemessene Richtungen bzw. Winkel beobachtet werden. In der Praxis ist die Lagerung des photogrammetrischen Netzes im dreidimensionalen Objektkoordinatensystem mit Hilfe von Passpunkten an gängigsten. Dabei kann zwischen einer **harten** und **weichen Lagerung** unterschieden werden.

6.6.2 Konfigurationsdefekt

Ein **Konfigurationsdefekt** tritt dann auf, wenn aufgrund fehlender Beobachtungen nicht alle Teile eines Netzes eindeutig bestimmt werden können.



Beispiel für einen Konfigurationsdefekt in einem Bildverband



6. Mehrbildorientierung

6.6.3 Harte und weiche Lagerung

Harte Lagerung vs. weiche Lagerung. Wir beschränken uns im Folgenden auf Passpunkte.

a) **Die harte Lagerung.** In diesem Fall sind die Koordinaten der Passpunkte feste Parameter in der Kleinste-Quadrate-Ausgleichung. Sofern im Passpunktnetz (z.B. Landeskoordinatensystem) Spannungen existieren und eine größere Anzahl von Passpunkten in die Ausgleichung einbezogen wird, deformieren diese Spannungen das aus den Strahlenbündeln gebildete Netz. Bei der harten Lagerung treten die Koordinaten der Passpunkte nicht als Unbekannte im Verbesserungsgleichungssystem auf (vgl. dazu Abschnitt 6.5.1, Beispiel a).

Fazit: Die Passpunktkoordinaten müssen mit übergeordneter Genauigkeit (z.B. Faktor 5-10 besser als die photogrammetrische Punktbestimmung erlaubt) bestimmt worden sein und dürfen untereinander keine Spannungen aufweisen.

Für die räumliche Anordnung der Passpunkte gelten dieselben Regeln wie für die absolute Orientierung. Es sind mindestens drei Passpunkte notwendig.

Von diesen drei Passpunkten müssen mindestens folgende Koordinatenkomponenten gegeben sein:

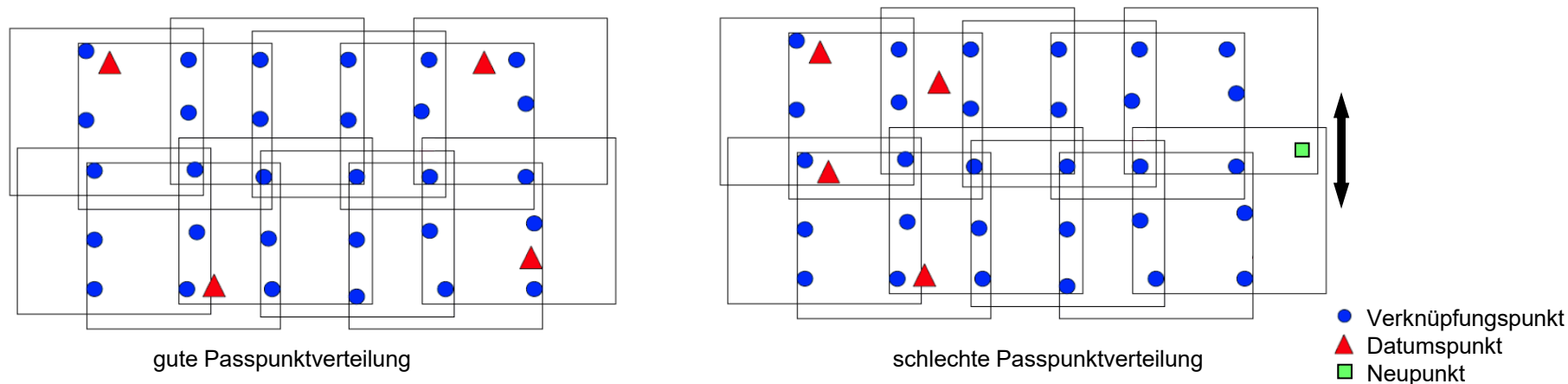
- mindestens 2×2 Koordinaten parallel zur primären Auswerteebene (X_1, Y_1, X_2, Y_2)
- mindestens 3 Koordinaten senkrecht zur Auswerteebene (Z_1, Z_2, Z_3)

⇒ 2 Vollpasspunkte (2×XYZ) + 1 Höhenpasspunkt (1×Z)

⇒ 2 Lagepasspunkte (2×XY) + 3 Höhenpasspunkte (3×Z)

Ungünstige Passpunktverteilungen sind zu vermeiden. (Hebelwirkungsgesetz der Mechanik!)

Vgl. dazu die Fehlertheorie der Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen (siehe VO "Photogrammetrie").





6. Mehrbildorientierung

6.6.4 Zwangsfreie Einpassung mit (fingierten) Passpunkten



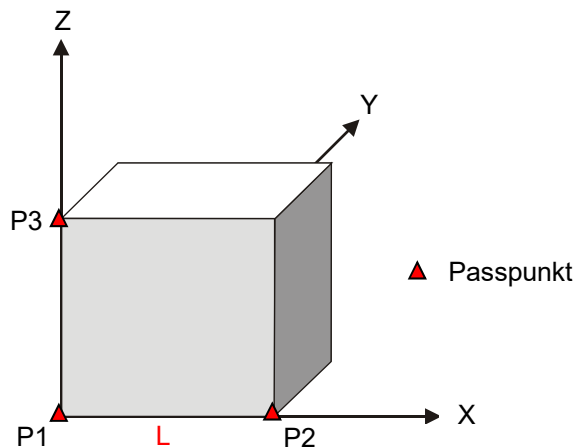
Abschnitt 6.6.3 cont.

b) **Die weiche Lagerung.** In diesem Fall sind die Koordinaten der Passpunkte als Beobachtungen aufgefasst; sie erhalten Verbesserungen (vgl. dazu wieder Abschnitt 6.5.1, Beispiel a). Etwaige Spannungen im Passpunktnetz werden dabei – abhängig von den Gewichten dieser Beobachtungskategorie – nur teilweise auf das aus den Strahlenbündeln gebildete Netz übertragen. Im Gegensatz zur harten Lagerung treten bei der weichen Lagerung im Verbesserungsgleichungssystem die Koordinaten der Passpunkte als Unbekannte auf; zusätzlich gibt es die Verbesserungsgleichungen.

6.6.4 Zwangsfreie Einpassung mit (fingierten) Passpunkten

Soll das Objektkoordinatensystem ohne Einfluss etwaiger Netzspannungen durch (fehlerfreie) Passpunkte festgelegt werden, kann eine zwangsfreie Einpassung auf die minimal zur Datumsfestlegung notwendigen Objektinformation vorgenommen werden.

Der Maßstab wird aus einer bekannten Strecke abgeleitet. Die Koordinatenachsen können mit der sog. 3-2-1-Methode festgelegt werden.



Zwangsfreie Einpassung auf Passpunkte (3-2-1-Methode)

Punkt	X	Y	Z
P1	0	0	0
P2	-	0	0
P3	-	0	-

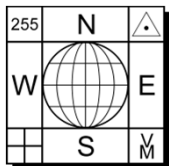
Maßstab und fingierte Passpunkte

Punkt	X	Y	Z
P1	0	0	0
P2	L	0	0
P3	-	0	-

2 1/3 fingierte Passpunkte

Nachteil: Die ermittelten Genauigkeitsmaße (Q_{xx}) hängen ganz entscheidend von der Lage der (fingierten) Passpunkte ab, die das Datum definieren.
Gefahr der Extrapolation!

⇒ Lagerung mittels freier Netzausgleichung



6. Mehrbildorientierung

6.6.5 Freie Netzausgleichung

Die **freie Netzausgleichung** löst das Problem der Datumsfestlegung durch Lagerung des Netzes auf die Näherungskoodinaten der Neupunkte, wenn keine Passpunkte oder andere Datumsfestlegungen vorhanden sind.

Die Näherungskoodinaten sämtlicher Objektpunkte bilden einen räumlichen Punkthaufen. Dieser Punkthaufen kann verformungsfrei durch drei Translationen, drei Rotationen und eine Maßstabsanpassung auf das Modell der photogrammetrisch bestimmten Objektpunkte transformiert werden (vgl. Abschnitt 3.16 – absolute Orientierung). Die photogrammetrischen Beobachtungen werden durch diese Transformationen nicht beeinflusst.

Der Rangdefekt von 7 der Normalgleichungsmatrix wird dadurch behoben, dass genau sieben geeignete Bedingungen (P. Meissl, 1969: "Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens", vgl. z.B. VO "Ingenieurgeodäsie") definiert werden. Die Berücksichtigung der Bedingungen kann auch über Pseudobeobachtungen mit hohem Gewicht gelöst werden.

Die freie Netzausgleichung bewirkt eine Gesamtpurminimierung der Kovarianzmatrix \mathbf{Q}^* . Der Schwerpunkt der Objektkoodinaten als Bezugspunkt des Datums wird zum festen Punkt, dessen Standardabweichungen in XYZ zu Null werden.

Bei der **Teilspurminimierung** werden jene Punkte, welche zur Lagerung nicht beitragen sollen, aus den Bedingungsgleichungen ausgeklammert. Die entsprechenden Spalten in der **B**-Matrix werden mit Nullen belegt.

Im freien Netz wird eine **optimale innere Genauigkeit** ermittelt, die wesentlich besser zu beurteilen ist als die Standardabweichungen bei zwangsfreier (oder gar überbestimmter) Datumsdefinition.

Die **äußere Genauigkeit** ist anhand der Standardabweichung nicht zu beurteilen!

Die freie Netzausgleichung ist ein sehr flexibel einsetzbares Mittel, wenn

- keine Passpunkte vorliegen
- nur die gegenseitige Lage der Punkte interessiert oder
- nur die Güte des funktionalen Modellansatzes überprüft werden soll, z.B. das gewählte Modell der inneren Orientierung einer Aufnahmekamera (Simultankalibrierung).

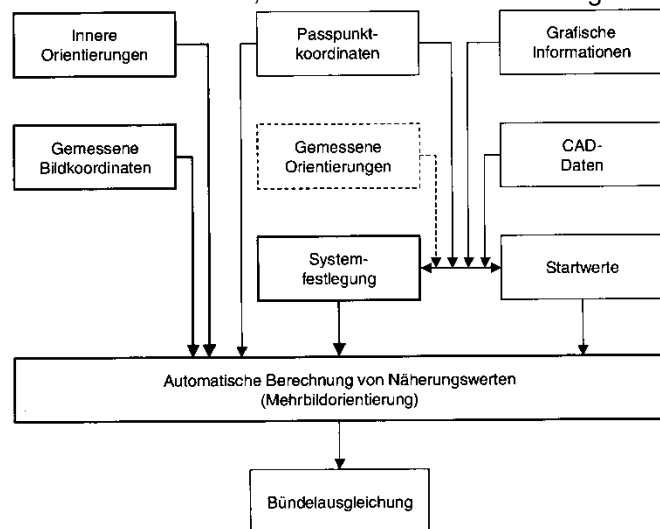
<p>■ keine Translation: $\sum_{i=1}^n dX_i = 0$</p> <p>(vgl. Kap. 3.16.1)</p> <p>$\sum_{i=1}^n dY_i = 0$</p> <p>$\sum_{i=1}^n dZ_i = 0$</p>	<p>■ keine Rotation: $\sum_{i=1}^n (-Z_i^0 dY_i + Y_i^0 dZ_i) = 0$</p> <p>$\sum_{i=1}^n (Z_i^0 dX_i - X_i^0 dZ_i) = 0$</p> <p>$\sum_{i=1}^n (-Y_i^0 dX_i + X_i^0 dY_i) = 0$</p>	<p>■ keine Maßstabsänderung: $\sum_{i=1}^n (X_i^0 dX_i + Y_i^0 dY_i + Z_i^0 dZ_i) = 0$</p> <p>$dX_i, dY_i, dZ_i$... unbekannte Zuschläge (geschätzte Parameter)</p> <p>X_i^0, Y_i^0, Z_i^0, ... Näherungswerte</p>
--	--	--



6. Mehrbildorientierung

6.7 Bestimmung von Näherungswerten

Näherungswerte werden für alle zu berechnenden Unbekannten benötigt, insbesondere auch für sämtliche Orientierungsdaten und alle neu zu bestimmenden Objektpunkte. Da im Nahbereich grundsätzlich beliebige Aufnahmeanordnungen in beliebig gelagerten Objektkoordinatensystemen vorkommen können, ist die manuelle Berechnung von Näherungswerten häufig kaum möglich. \Rightarrow automatische Berechnung von Näherungswerten.



Verfahren und Abläufe zur Näherungswertbestimmung
(Th. Luhmann, 2003: Nahbereichsphotogrammetrie)

Ausgehend von den vorliegenden Informationen (siehe Abb.) wird versucht, alle Bilder miteinander zu verknüpfen und näherungsweise zu orientieren. Somit liegen auch für die Verknüpfungspunkte näherungsweise Objektkoordinaten vor. Bei schematisch angeordneten Luftbildverbänden kann die Näherungswertberechnung meist ohne nennenswerte Probleme durchgeführt werden.

6.7.1 Automatische Berechnung von Näherungswerten

Für die automatische Näherungswertberechnung in komplexen photogrammetrischen Bildverbänden haben sich drei Strategien als erfolgreich erwiesen:

- (i) kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden
- (ii) sukzessive Modellbildung
- (iii) Transformation unabhängiger Modelle

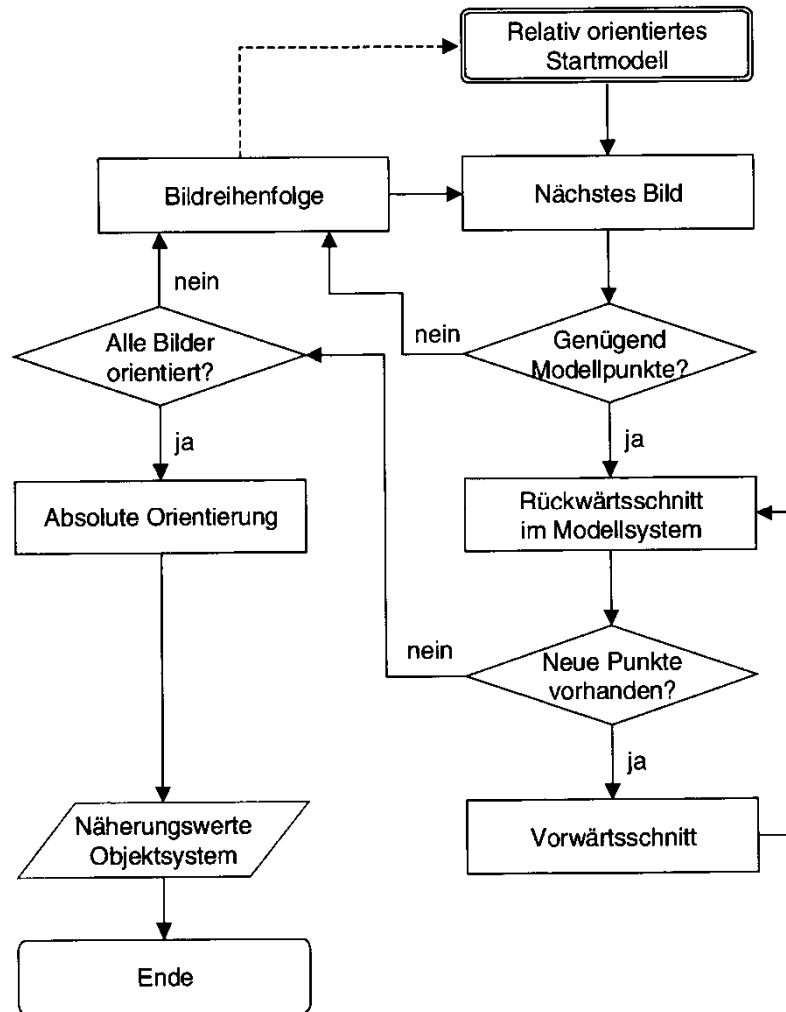
Alle drei Verfahren beruhen auf einer iterativen Bestimmung der Parameter der äußeren Orientierung sowie der Objektpunktkoordinaten, wobei ausgehend von einem Startmodell nach und nach alle Bilder des Verbandes hinzugenommen werden. Die drei Verfahren können auch geschickt miteinander kombiniert werden. Ähnliche Konzepte werden auch in der Computer Vision verfolgt, wobei die entsprechenden projektiven Ansätze zum Einsatz kommen. Algorithmen der CV, wie z.B. die DLT oder die projektiven Orientierungsverfahren, welche auf der Berechnung von \mathbf{F} und \mathbf{T} beruhen, können auch in der "klassischen" Bildtriangulation sinnvoll eingesetzt werden.



6. Mehrbildorientierung

6.7 Bestimmung von Näherungswerten

6.7.1.1 Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsschnitt



Auswahl des Startmodells nach folgenden Gütekriterien:

- Anzahl Verknüpfungspunkte → max. Anzahl
- Genauigkeit der RO → minimales σ_0
- Mittlerer Schnittwinkel im Modell → nahe 90°
- Mittlere Restklaffen → min. Restklaffungen
- Anzahl der groben Fehler in der RO → kein Ausreißer
- Fläche im Bild, die von Verknüpfungspunkten abgedeckt wird → max. Bildfläche

Näherungswertbestimmung mit kombiniertem Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden
 (Th. Luhmann, 2003: Nahbereichsphotogrammetrie)

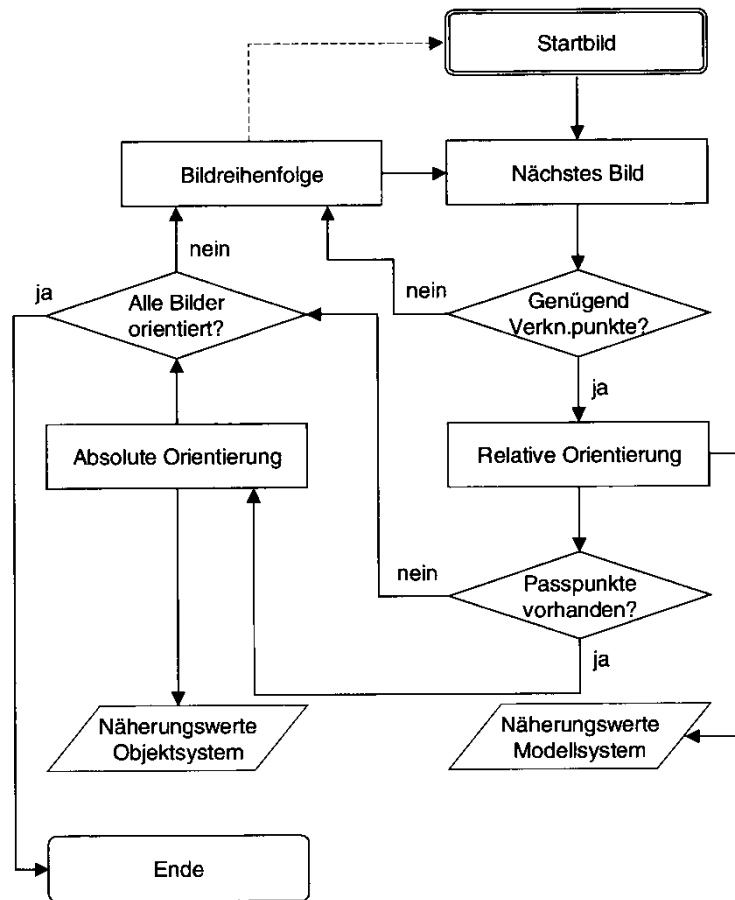


6. Mehrbildorientierung

6.7 Bestimmung von Näherungswerten

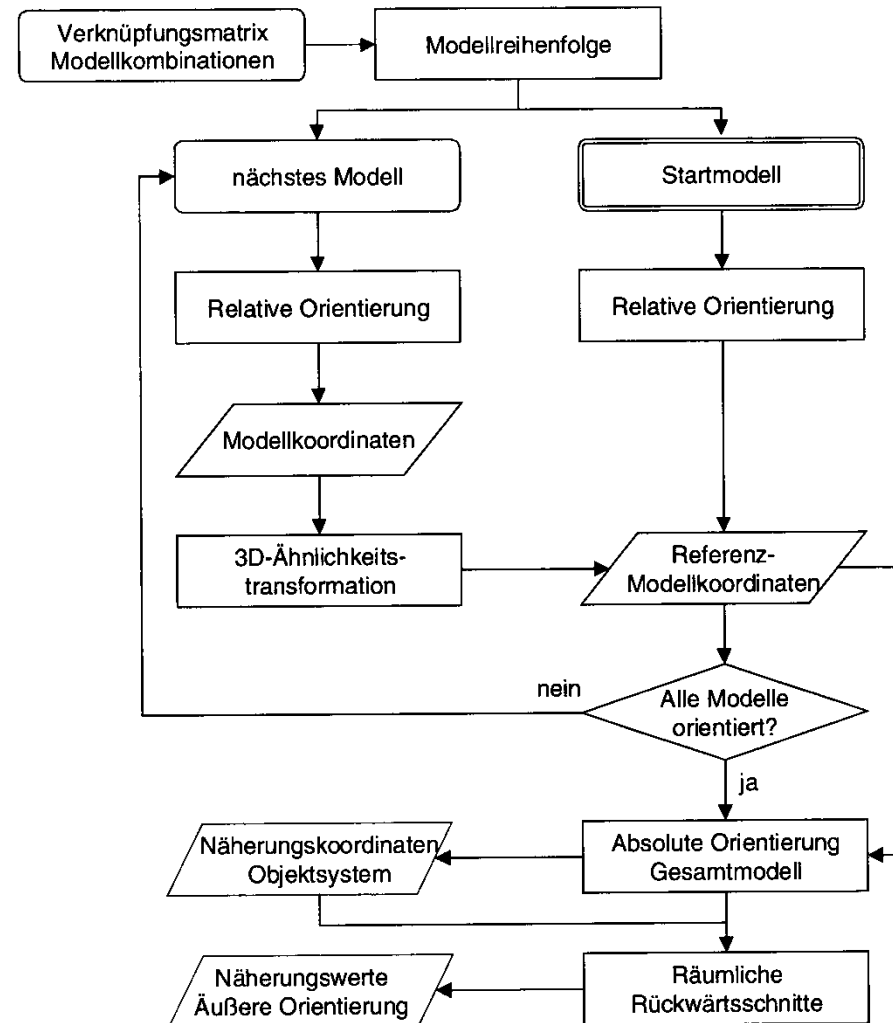


6.7.1.2 Sukzessive Modellbildung



Näherungswertbestimmung mit sukzessiver Modellbildung
(Th. Luhmann, 2003: Nahbereichsphotogrammetrie)

6.7.1.3 Transformation unabhängiger Modelle



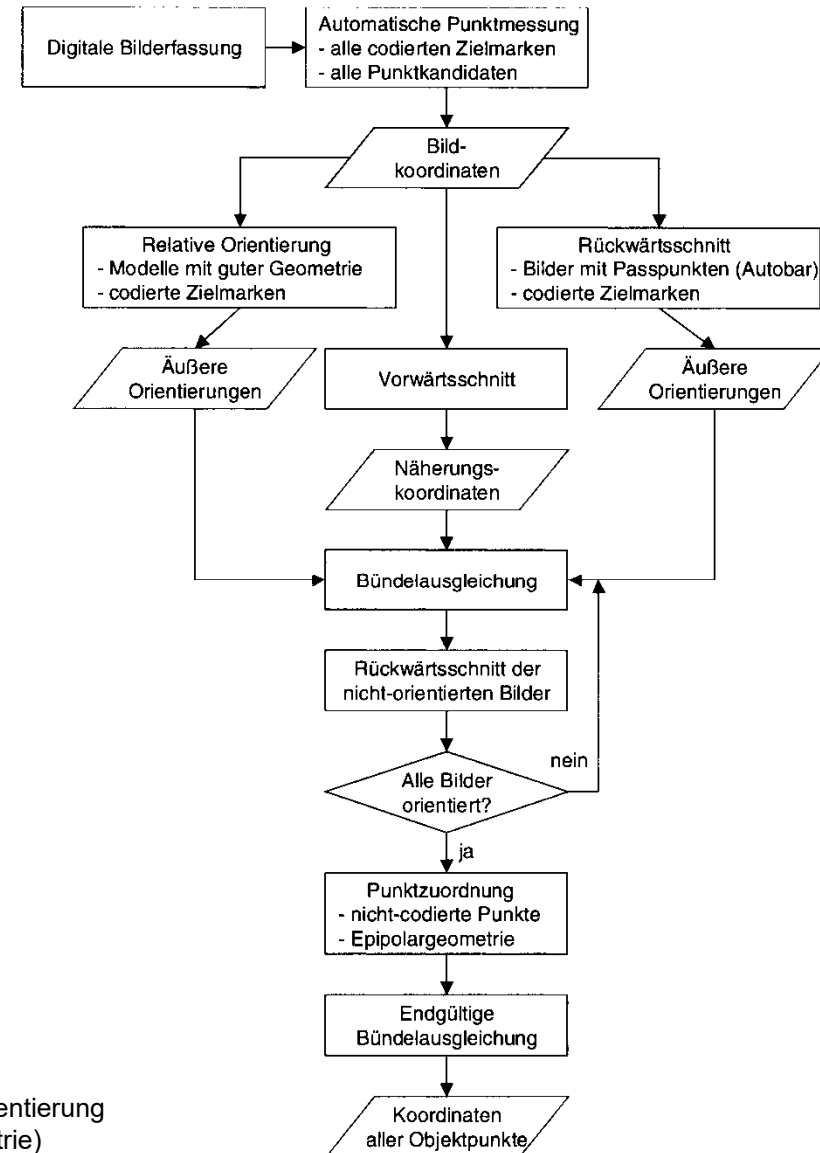
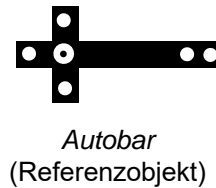
Näherungswertbestimmung durch Transformation unabhängiger Modelle
(Th. Luhmann, 2003: Nahbereichsphotogrammetrie)



6. Mehrbildorientierung

6.7 Bestimmung von Näherungswerten

6.7.2 Näherungswertbestimmung mit automatischer Punktmessung



Vollautomatische Näherungswertbeschaffung und Orientierung
(Th. Luhmann, 2003: Nahbereichsphotogrammetrie)



6. Mehrbildorientierung

6.8 Genauigkeitsbetrachtungen

Ein gutes Bündelausgleichungsprogramm erstellt ein umfangreiches und aussagekräftiges Protokoll:

- Liste der Eingabedateien und Steuerparameter, Datum, Projektbeschreibung
- Anzahl der Iterationen und Standardabweichung der Gewichtseinheit σ_0
- Liste der Beobachtungen (Bildmessungen) mit Verbesserungen, Zuverlässigkeitsmaßen und Testgrößen, bildweise sortiert
- mittlere Standardabweichungen der Bildkoordinaten, bildweise, getrennt nach x und y
- Liste der aufgedeckten oder eliminierten Ausreißer
- Liste der eingegebenen Passpunkte
- Liste der ausgeglichenen Objektpunkte (Neupunkte) mit Standardabweichungen
- mittlere Standardabweichung der Neupunkte, getrennt nach X, Y und Z
- maximale Verbesserungen und Nummern der entsprechenden Neupunkte
- Daten der inneren Orientierung mit Standardabweichungen
- Korrelationen zwischen den Parametern der inneren Orientierung
- Daten der äußeren Orientierung mit Standardabweichungen
- Korrelationen zwischen den Parametern der inneren und äußeren Orientierung
- Liste der zusätzlichen (geodätischen) Beobachtungen mit Standardabweichungen



6. Mehrbildorientierung

6.8.1 Genauigkeit der Bildkoordinaten

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u}} \quad \dots \text{ a posteriori Gewichtseinheitsfehler}$$

$$\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}}$$

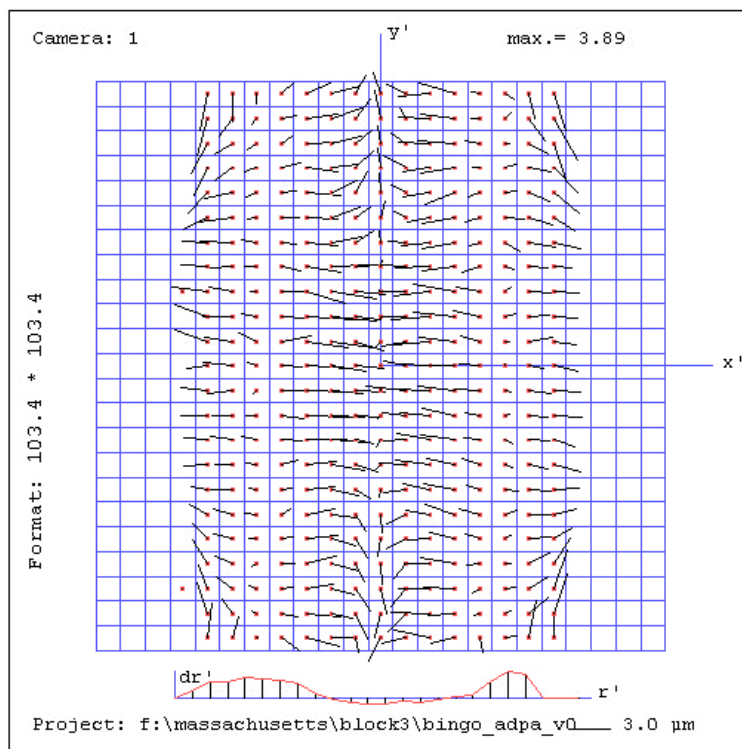
$$\mathbf{Q}_{ii} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{lv} = \mathbf{E} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad \dots \text{ "Erfolg des Ausgleichs"}$$

Bei gleich genauen Bildkoordinatenmessungen $\Rightarrow \hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y$

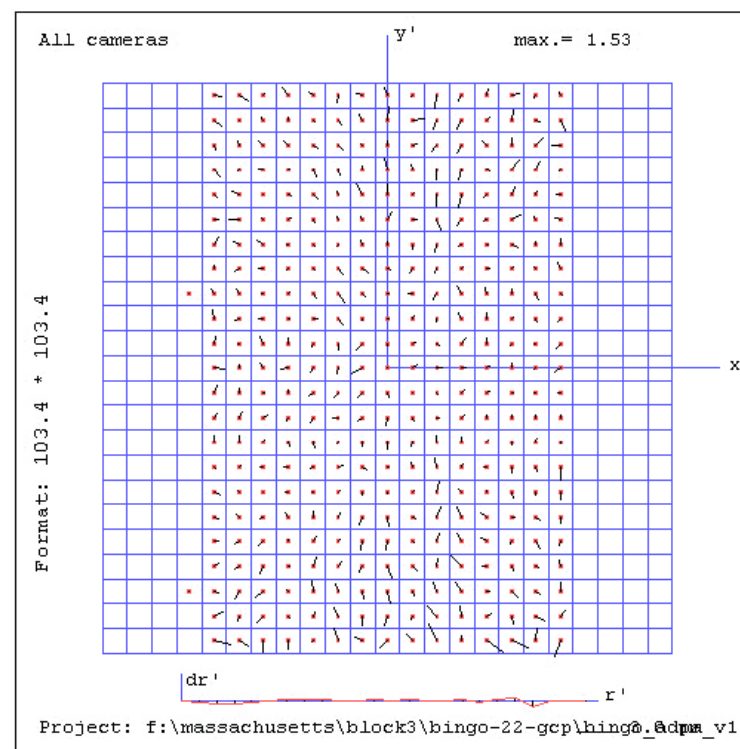
Bei einer graphischen Beurteilung der Restfehlerverteilung sollten keine systematischen Bildfehler mehr erkennbar sein.

Verbesserungen der Bildkoordinaten

UltraCam_D Vexcel
Flughöhe: 5000 m



mit systematischen Anteilen

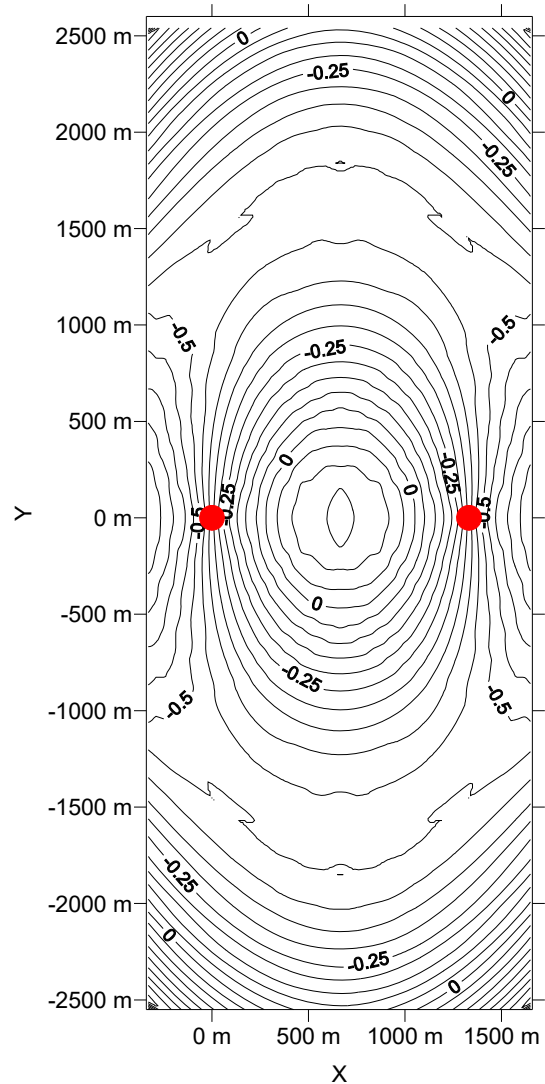


ohne systematische Anteile



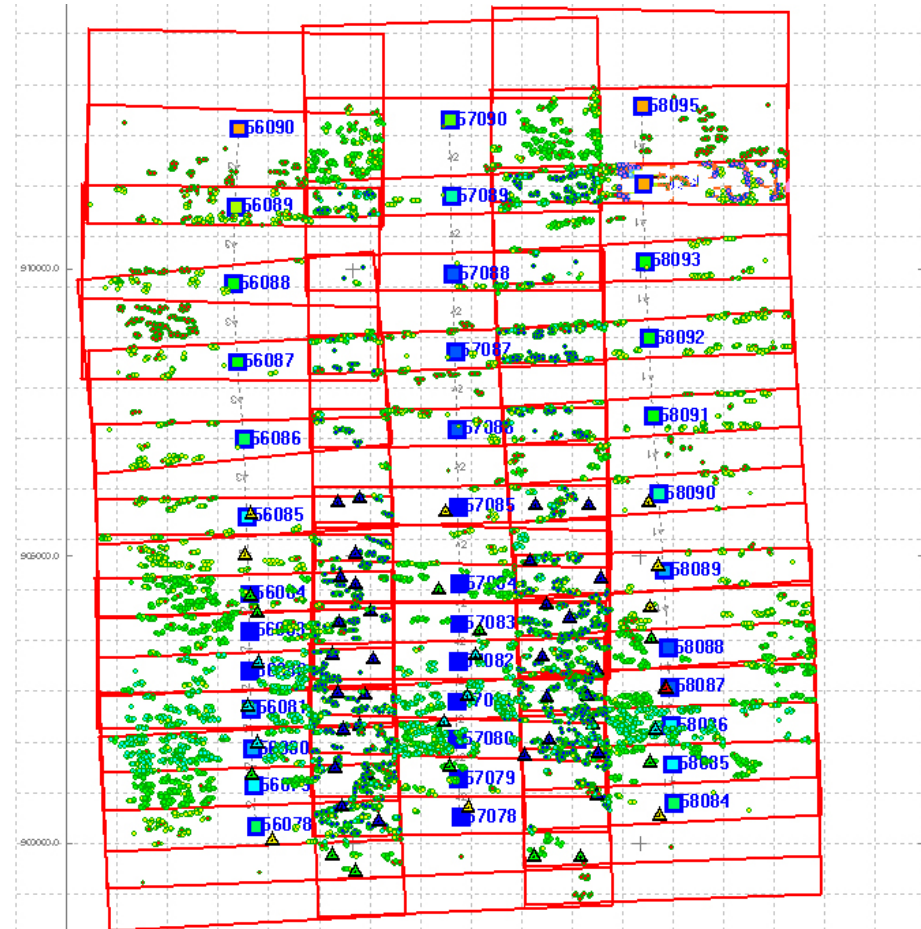
6. Mehrbildorientierung

6.8.1 Genauigkeit der Bildkoordinaten



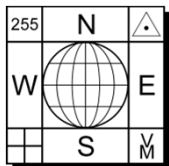
UltraCam_D Vexcel
 Flughöhe: 5000 m
 FOL: 60-80%
 SOL: 20-23%

Systematische Höhenfehler (m) im Einzelmodell
 zufolge nicht kompensierter systematischer Bildfehler



Triangulation mit MATCH-AT

Die systematischen Anteile des Bildfehlers wurden durch
 zusätzliche Parameter in Bingo 5.0 modelliert.



6. Mehrbildorientierung

6.8.2 Genauigkeit der Objektkoordinaten

In der Regel ist die Genauigkeit der ausgeglichenen Objektpunkte von größter Bedeutung für die Bewertung einer Bündelausgleichung.

- Mittlere Standardabweichung sämtlicher Objektpunkte

$$\sigma_X^2 = \frac{\text{sp}(\mathbf{Q}_{xx}^X)}{n} \hat{\sigma}_0^2 = \frac{(q_{X_1X_1} + \dots + q_{X_nX_n})}{n} \hat{\sigma}_0^2$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\text{sp}(\mathbf{Q}_{xx}^Y)}{n} \hat{\sigma}_0^2 = \frac{(q_{Y_1Y_1} + \dots + q_{Y_nY_n})}{n} \hat{\sigma}_0^2$$

$$\sigma_Z^2 = \frac{\text{sp}(\mathbf{Q}_{xx}^Z)}{n} \hat{\sigma}_0^2 = \frac{(q_{Z_1Z_1} + \dots + q_{Z_nZ_n})}{n} \hat{\sigma}_0^2$$

- Maximale Standardabweichung aller Objektpunkte → problematischer Bereich des Bildverbandes

Beide Qualitätskriterien sagen nur etwas über die **innere Genauigkeit** der photogrammetrischen Auswertung aus. Liegt über alle Bilder eine homogene Bildmessgenauigkeit vor, sind unterschiedliche Genauigkeiten in den Objektpunkten vor allem auf folgende Ursachen zurückzuführen:

- unterschiedliche Bildmaßstäbe bzw. Aufnahmeentfernungen
- unterschiedliche Anzahl von Bildstrahlen pro Objektpunkt
- unterschiedliche Schnittwinkel homologer Bildstrahlen
- unterschiedliche Erkennbarkeit der Objektpunkte
- unterschiedliche Nutzung des Bildformates, z.B. der Bildrandbereiche, in denen die Verzeichnung häufig groß ist.
- Netzspannungen in den Passpunkten.

Eine Aussage über die **äußere Genauigkeit** einer Auswertung lässt sich nur durch den Vergleich von photogrammetrisch bestimmten Objektpunkten oder Strecken mit übergeordnet genau vorliegenden Referenzen bestimmen.

Eine durchgreifende Kontrolle ist dabei nur mit solchen Objektinformationen möglich, die nicht als Passpunkte oder -strecken in der Bündelausgleichung eingesetzt wurden.

RMS ... *root mean square*

$$\text{RMS}_X = \sqrt{\frac{\Delta X_i^2}{n}}; \quad \text{RMS}_Y = \sqrt{\frac{\Delta Y_i^2}{n}}; \quad \text{RMS}_Z = \sqrt{\frac{\Delta Z_i^2}{n}}$$

n ... Anzahl der Kontroll-/Referenzpunkte (*check points*)

$$\Delta X_i = X_{\text{ref},i} - X_{\text{phot},i}; \quad \Delta Y_i = Y_{\text{ref},i} - Y_{\text{phot},i}; \quad \Delta Z_i = Z_{\text{ref},i} - Z_{\text{phot},i}$$



6. Mehrbildorientierung

6.8.3 Genauigkeit der Simultankalibrierung



Die ausgeglichenen Parameter der inneren Orientierung sowie ihre Korrelationen sind zu analysieren, wenn das Aufnahmesystem innerhalb der Bündelausgleichung simultan kalibriert wird.

Kamerakonstante c :

Soll das Ergebnis der Bündelausgleichung aber für eine tatsächliche Kalibrierung der Kamera herangezogen werden, mit deren Daten an anderer Stelle weitergearbeitet wird, sollte die Kamerakonstante eindeutig und mit einer Standardabweichung in der Größenordnung der Bildmessgenauigkeit berechnet werden.

Bildhauptpunkt x_0, y_0 :

Die Standardabweichung der Hauptpunktskoordinaten sollte in der Größenordnung der Bildmessgenauigkeit liegen.

Verzeichnung:

- radial-symmetrische Verzeichnung K_1, K_2, K_3 :
 K_2 ist mit K_1 stark korreliert, K_3 meist nicht signifikant
- tangential-asymmetrische Verzeichnung P_1, P_2 sowie Maßstabsunterschied und Scherung a, b :
→ analoge Kameras: meist nicht signifikant bestimmbar
→ digitale Kameras: meist signifikant bestimmbar

Korrelationen zwischen den Parametern der inneren Orientierung sowie zwischen innerer und äußerer Orientierung sollten durch eine geeignete Aufnahmekonfiguration minimiert werden.

Korrelationen spielen grundsätzlich keine Rolle für die Punktbestimmung, solange der Rechenvorgang in einem Guss, also innerhalb eines mathematischen Systems erfolgt. Werden jedoch einige Parameter herausgezogen und für weitere externe Berechnungen verwendet, können die Korrelationen in der Regel nicht weiter berücksichtigt werden und führen zu Verfälschungen des funktionalen Modells.

(Quelle: Th. Luhmann, 2003: Nahbereichsphotogrammetrie.)



6. Mehrbildorientierung

6.9 Projective reconstruction – bundle adjustment

N-View Computational Methods → Hartley & Zissermann, 2003: Multiple View Geometry in Computer Vision.

$$\mathbf{x}_j^i = \mathbf{P}^i \mathbf{X}_j$$

- i ... Bildindex (Kameraindex)
- j ... Punktindex
- \mathbf{x}_j^i ... Bild des Punktes \mathbf{X}_j im Bild i (Bildpunkte)
- \mathbf{P}^i ... Projektionsmatrix des Bildes i

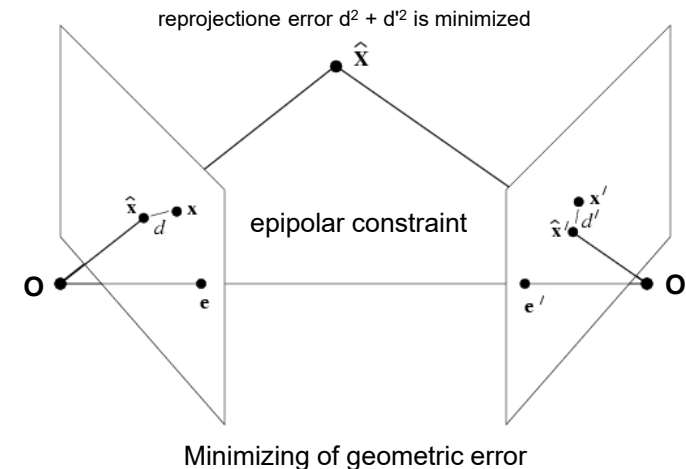
\mathbf{x}_j^i ... image measurements are noisy. Measurement noise is Gaussian.

$\hat{\mathbf{P}}^i$... Schätzungen

$$\hat{\mathbf{x}}_j^i = \hat{\mathbf{P}}^i \hat{\mathbf{X}}_j \quad \text{mit} \quad \min_{\hat{\mathbf{P}}^i, \hat{\mathbf{X}}_j} \sum_{ij} d(\hat{\mathbf{P}}^i \hat{\mathbf{X}}_j, \mathbf{x}_j^i)^2 \quad \text{Maximum Likelihood (ML) solution}$$

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$... geometric distance between the homogeneous points \mathbf{x} and \mathbf{y}
 $d(\hat{\mathbf{P}}^i \hat{\mathbf{X}}_j, \mathbf{x}_j^i)$... reprojection error

⇒ *bundle adjustment*



Bundle adjustment should be generally be used as a final step of any reconstruction algorithm. This method has the advantage of being tolerant of missing data while providing a true ML estimate. At the same time it allows assignment of individual covariances to each measurement and may also be extended to include estimates of priors and constraints on camera parameters or point positions. In short, it would seem to be an ideal algorithm, except for the fact: (i) it requires a good initialization to be provided, and (i) it can become an extremely large minimization problem because of the number of parameter involved.

Iterative minimization:

dimension of matrices ... $(3n+11m) \times (3n+11m)$

If the Levenberg-Marquardt algorithm ist used to minimize (the function shown above) then the matrices of dimension $(3n+11m) \times (3n+11m)$ must be factorized (or sometimes inverted).

As m and n increases this becomes extremely costly.

There are several solutions to this problem:

- (i) **Reduce n and/or m .** Do not include all views or all the points, and fill these in later by resectioning or triangulation respectively; or, partition the data into several sets, bundle adjust each set separately and then merge.
- (ii) **Interleave.** Alternate minimizing reprojection error by varying the cameras with minimizing reprojection error by varying the points.
- (ii) **Sparse methods.**



7. Direkte Georeferenzierung

7.1 Einleitung



Quelle: GPS/inertial-Daten in der Luftbildphotogrammetrie: → <http://www.ifp.uni-stuttgart.de/forschung/photo/georef-Dateien/georef.html>

Die Verwendung von GPS/inertialen-Daten in der Luftbildphotogrammetrie, oder mit anderen Worten die direkte Messung der Position und der Orientierungswinkel eines Sensors zum Zeitpunkt der Datenaufzeichnung unter Verwendung eines integrierten GPS/inertial-Moduls, erlaubt die effiziente und kostengünstige Orientierung von Sensoren. Im Einzelnen ermöglicht diese direkte Georeferenzierung

- eine schnellere Bestimmung der äußeren Orientierung eines Sensors. Im Idealfall kann das klassische Verfahren der indirekten Bildorientierung durch Aerotriangulation (AT) durch direkte Georeferenzierung ganz abgelöst werden.
- eine sehr flexible Flugplanung, da man nicht mehr auf die klassische in der Photogrammetrie übliche regelmäßige Anordnung von Flugstreifen in Blockform angewiesen ist.
- eine zuverlässigere automatische Punktübertragung zwischen benachbarten Bildern, da die äußere Orientierung der Bilder bereits bekannt ist.

Darüber hinaus bietet die direkte Georeferenzierung basierend auf GPS/inertialen Sensoren die einzige Möglichkeit für eine operationelle Auswertung digitaler Zeilenkameras, die nach dem sogenannten *Pushbroom*-Prinzip arbeiten.

Die oben vorgestellten Punkte zeigen deutlich das große Potenzial integrierter GPS/inertial-Module im Hinblick auf eine effiziente und ökonomische Datenauswertung. Im Idealfall könnten integrierte GPS/inertial-Module sogar die klassische AT ganz ablösen, sofern

- die direkt gemessenen GPS/inertial-Positionen und -Winkel mit einer ausreichenden Genauigkeit und Zuverlässigkeit bestimmt werden,
- die Gesamtsystemkalibrierung bestehend aus den GPS/inertial-Sensoren und dem zu orientierenden Sensor (z.B. Luftbildkamera) bekannt ist.

Hauptaufgabe: Bestimmung der äußeren Orientierung eines (abbildenden) Sensors zum Zeitpunkt der Datenaufzeichnung.

Indirekter Ansatz

- *indirekte rechnerische* Bestimmung der äußeren Orientierung
- gleichzeitige Orientierung eines Bildverbandes durch Bündelblockausgleichung (AT)
- hauptsächlich basierend auf *Passpunktinformationen*

Direkter Ansatz

- *direkte Messung* der äußeren Orientierung durch zusätzliche Sensoren
- Verwendung von Positions- und Neigungsinformation
- hauptsächlich basierend auf integrierten *GPS/inertial Systemen*

Integrierter Ansatz



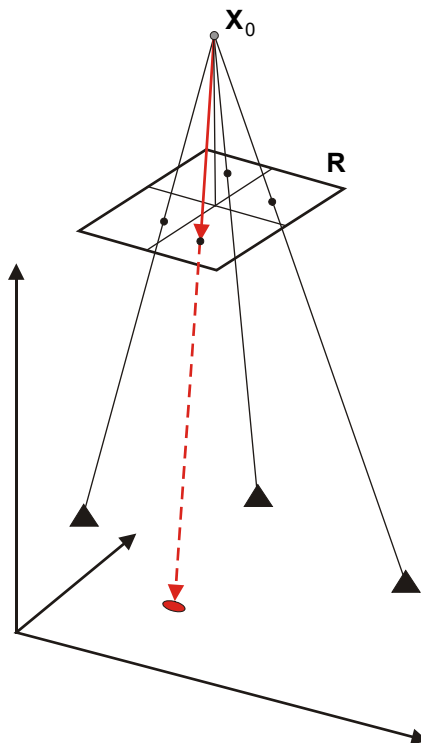
7. Direkte Georeferenzierung

7.1 Einleitung

Indirekte Georeferenzierung

äußere Orientierung
(geschätzt)

innere Orientierung

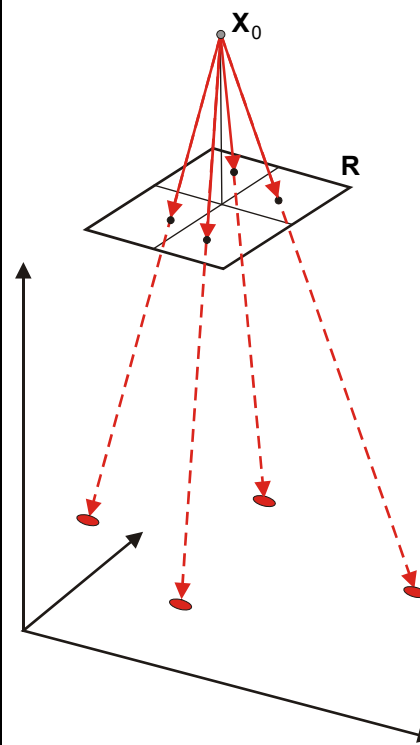


- Eingabedaten AT:
 - ▶ Passpunktinformationen
 - ▶ Messungen der Bildkoordinaten
 - ▶ Kenntnis der Sensorgeometrie
 - ▶ GPS Projektionszentren (optional)
- geschätzte Unbekannten:
 - ▶ Elemente der äußeren Orientierung $X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa$ pro Bild
 - ▶ Geländekoordinaten X_i, Y_i, Z_i pro Punkt
 - ▶ ggf. zusätzliche Parameter
 - Selbstkalibrierung (IO)
 - realisieren Übereinstimmung der physikalischen Bildentstehung mit dem gewählten math. Modell

Direkte Georeferenzierung

äußere Orientierung
aus GPS/inertial

innere Orientierung



- GPS/inertial Systemkomponenten:
 - ▶ DGPS Empfängerkonfiguration
 - Position, Geschwindigkeit
 - ▶ inertielle Messeinheit (IMU)
 - Position, Geschwindigkeit
 - Neigungsinformation
- GPS/inertial liefert vollständige äußere Orientierung
- Orientierung unabhängig vom zu orientierenden Sensor
 - + variabel einsetzbar
 - kein Bezug zum sensorspezifischen System (z.B. Bildkoordinatensystem)
- Kalibration notwendig
 - zeitliche Offsets
 - räumliche Offsets (Translationen und Rotationen)



7. Direkte Georeferenzierung

7.2 Grundprinzip

Das Grundprinzip der direkten Georeferenzierung basiert auf der optimalen Kombination von GPS mit inertialen Messkomponenten. Dabei werden die sich ergänzenden Systemeigenschaften ausgenutzt und aus die Einzelkomponenten sinnvoll zu einem Gesamtsystem integriert. Das GPS z.B. verfügt über eine hohe absolute Genauigkeit, mit der Positions- und Geschwindigkeitsinformation weltweit zur Verfügung gestellt werden können.

Im Gegensatz dazu basiert die inertielle Navigation ausschließlich auf der Messung von linearen Beschleunigung und Drehbewegungen eines Körpers relativ zu einem gewählten inertialen Bezugssystem. Inertialnavigation ist also vollständig autark. Die Positions-, Geschwindigkeits-, und Neigungsinformationen werden im Rahmen eines Integrationsprozesses bestimmt. Daher verfügen inertielle Messsysteme (IMU) über eine hohe Kurzzeitgenauigkeit, die aber in Folge der sich im Rahmen der Integration aufsummierender Fehler je nach Systemgenauigkeit abnimmt. Demzufolge verfügen GPS und IMU über komplementäre Fehlereigenschaften. Die optimale Integration der Systemkomponenten

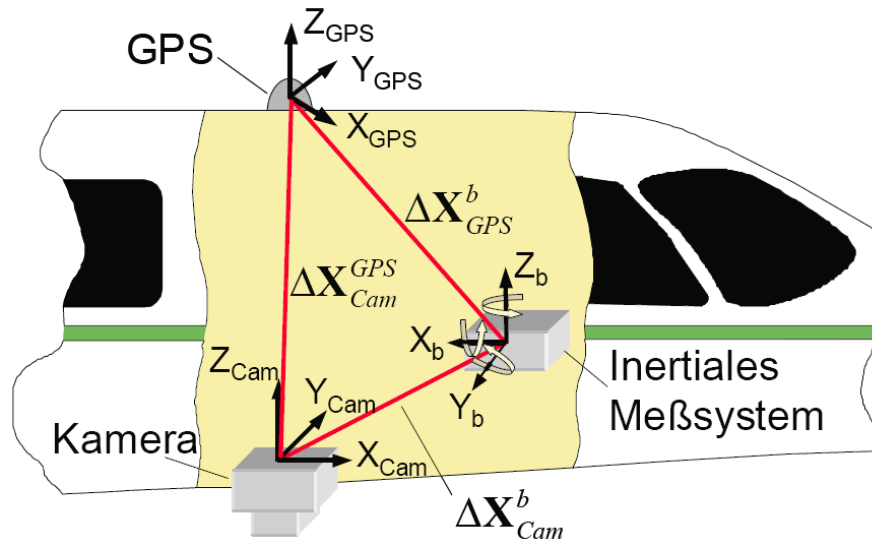
- erlaubt die vollständige Bestimmung der äußeren Orientierung (Position, Neigung) eines Sensors (z.B. Kamera).
- führt zu einer Steigerungen der Genauigkeit und Zuverlässigkeit des Gesamtsystems im Vergleich zu den stand-alone Einzelkomponenten.

Wird ein integriertes GPS/inertial-Modul zur direkten Messung der äußeren Orientierung einer Luftbildkamera oder eines anderen Sensors verwendet, so muss der aus der AT bekannte mathematische Ansatz der Zentralperspektive, realisiert in der Kollinearitätsgleichung, entsprechend modifiziert werden. Im Gegensatz zur indirekten Bildorientierung, bei der sich die Orientierungselemente rechnerisch ergeben und demnach direkt auf das Projektionszentrum der Kamera bezogen sind, so müssen die Messungen der GPS- und inertial-Komponenten zuerst auf das gewünschte Projektionszentrum reduziert werden, da normalerweise räumliche Offsets und Verdrehungen zwischen den einzelnen Sensoren existieren und in Kauf genommen werden müssen. Besonders kritisch ist dabei die Verdrehung zwischen dem Kamerakoordinatensystem und den internen IMU-Sensorachsen. Die integrierten GPS/inertial-Winkel beziehen sich nämlich zunächst auf die IMU-Sensorachsen und nicht auf das gewünschte Bildkoordinatensystem der Kamera und müssen demnach entsprechend um die sogenannten Misalignment- oder Boresight-Alignment-Winkel korrigiert werden. Darüber hinaus sind alle Messungen zeitlich zu synchronisieren und auf die Aufnahmezeitpunkte der Kamera zu interpolieren. Weitere wichtige Aspekte wie die unterschiedliche Definition der Drehwinkel (Navigationswinkel versus photogrammetrische Winkel) und die Verwendung verschiedener Bezugssysteme werden nur erwähnt und in diesem Zusammenhang nicht weiter ausgeführt (vgl. VO des Institutes für Navigation und Satellitengeodäsie wie z.B. "Navigation Systems").

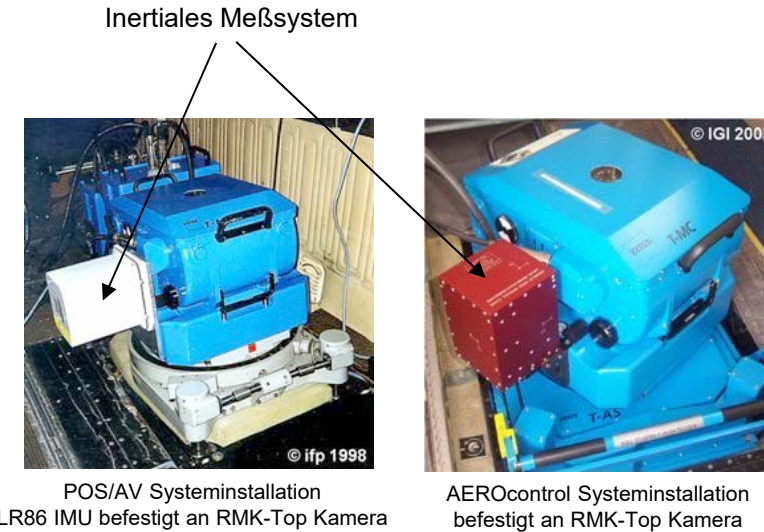


7. Direkte Georeferenzierung

7.2 Grundprinzip



Koordinatensysteme für die direkte Georeferenzierung



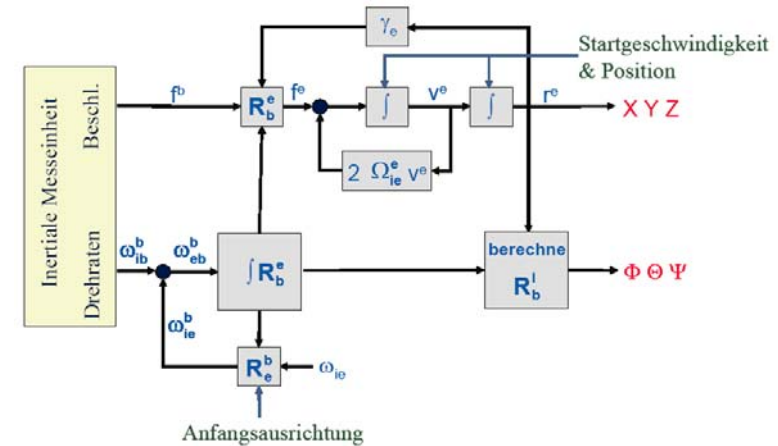
POS/AV Systeminstallation
LR86 IMU befestigt an RMK-Top Kamera

AEROcontrol Systeminstallation
befestigt an RMK-Top Kamera

(Schwarz et al. 1994)

	hochgenaues System	Navigationssystem	Kurs/Lage-Referenzsystem
Position			
1 h	0.3-0.5 km	1-3 km	200-300 km
1 min	0.3-0.5 m	0.5-3 m	30-50 m
1 sec	0.01-0.02 m	0.03-0.1 m	0.3-0.5 m
Neigung (°)			
1 h	$3-8 \cdot 10^{-3}$	0.01-0.05	1-3
1 min	$0.3-0.5 \cdot 10^{-3}$	$4-5 \cdot 10^{-3}$	0.2-0.3
1 sec	$<0.3 \cdot 10^{-3}$	$3-5 \cdot 10^{-3}$	0.01-0.03

Genauigkeitseinteilung für INS



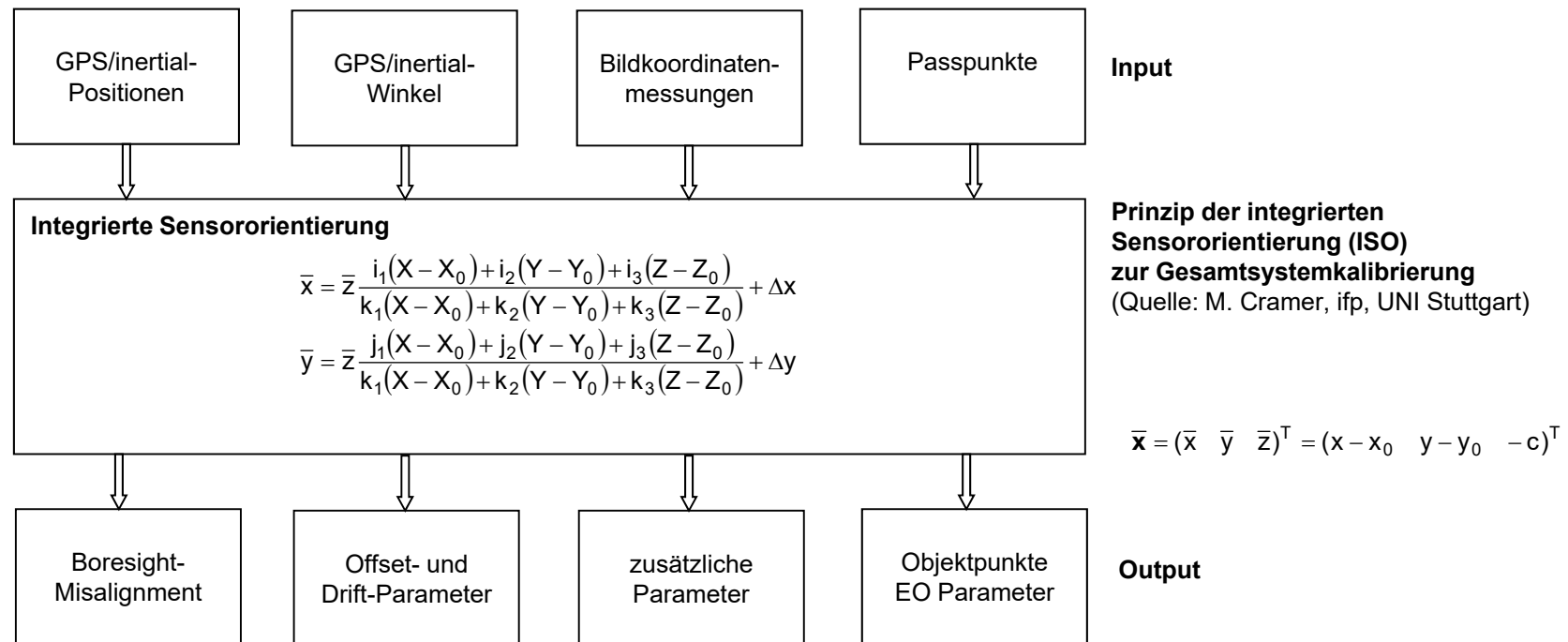
Mechanisierung der Inertialdaten in einem geozentrischen Koordinatensystem



7. Direkte Georeferenzierung

7.2 Grundprinzip

Die **integrierte Sensororientierung (ISO)** ist der bevorzugte Ansatz, um diese Gesamtsystemkalibrierung zu bestimmen. Neben der entsprechenden Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den unterschiedlichen Kalibrierparametern erlaubt dieser integrierte Ansatz auch die entsprechende Berücksichtigung der Genauigkeiten der beobachteten GPS/inertial bestimmten äußeren Orientierungselementen. Diese GPS/inertial-Daten werden als direkte Beobachtungen in die Parameterschätzung eingeführt. Das Funktionalmodell basiert auf den bekannten Kollinearitätsgleichungen und ist erweitert um zusätzliche Parameter, um die systematischen Offsets und linearen Driftkorrekturen (falls notwendig) der direkt beobachteten Winkel und Positionen zu modellieren. Die Boresightmismatch-Winkel werden dabei als Winkeloffset modelliert.



Neben dieser **Gesamtsystemkalibrierung** kann die integrierte Sensororientierung auch verwendet werden, um im eigentlichen Missionsgebiet noch auftretende Restfehler mit einer minimalen Anzahl von Passpunkten zu korrigieren. Diese Möglichkeit ist essentiell, um höchste Genauigkeit und Zuverlässigkeit für diejenigen Anwendungen zu gewährleisten, bei denen die direkte Georeferenzierung allein nicht die gewünschten Genauigkeiten erzielt.



7. Direkte Georeferenzierung

7.2 Grundprinzip

Um den zur photogrammetrischen Auswertung benötigten Zusammenhang zwischen Bild- und Objektkoordinaten bei einer direkten Messung der äußeren Orientierung zu beschreiben, muss die grundlegende perspektive Abbildungsgleichung modifiziert werden zu:

$$\mathbf{X}_P^I = \mathbf{X}_0^I + \mathbf{R}_b^I (\lambda \Delta \mathbf{R}_{Cam}^b \bar{\mathbf{x}}_P^{Cam} + \Delta \mathbf{X}_{Cam}^b - \Delta \mathbf{X}_{GPS}^b)$$

$$\mathbf{X}_P^I = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix}$$

... die Objektkoordinaten des Punktes P im übergeordneten System,

$$\mathbf{X}_0^I = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

... die GPS Position des Phasenzentrums der Antenne im übergeordneten System,

$$\mathbf{R}_b^I(\omega, \varphi, \kappa)$$

... die Rotation vom Körperkoordinatensystem b des inertialen Meßsystems in das übergeordnete Geländekoordinatensystem mit den gemessenen Orientierungswinkeln ω , φ und κ ,

$$\Delta \mathbf{R}_{Cam}^b(\Delta\omega, \Delta\varphi, \Delta\kappa)$$

... die Rotation vom Bildkoordinatensystem des abbildenden Sensors in das Körperkoordinatensystem b des INS, wobei $\Delta\omega$, $\Delta\varphi$, $\Delta\kappa$ die unbekanntene Fehlausrichtung (Misalignment) zwischen beiden Systemen definieren,

$$\bar{\mathbf{x}}_P^{Cam} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}^{Cam}$$

... der Vektor des Bildpunktes aus den reduzierten Bildkoordinaten, gegeben im Kamerakoordinatensystem Cam,

$$\Delta \mathbf{X}_{Cam}^b = \begin{pmatrix} \Delta X_{Cam} \\ \Delta Y_{Cam} \\ \Delta Z_{Cam} \end{pmatrix}^b$$

... die konstante Verschiebung zwischen inertialem Messsystem und Kamera, definiert im Körperkoordinatensystem b,

$$\Delta \mathbf{X}_{GPS}^b = \begin{pmatrix} \Delta X_{GPS} \\ \Delta Y_{GPS} \\ \Delta Z_{GPS} \end{pmatrix}^b$$

... die konstante Verschiebung zwischen inertialem Messsystem und GPS-Antenne, gegeben im Körperkoordinatensystem b.

Unter gewissen Voraussetzungen ($\Delta \mathbf{X}_{Cam}^{GPS}$ geodätisch gemessen, $\Delta \mathbf{X}_{Cam}^b$ klein) vereinfacht sich obige Formel zu: $\mathbf{X}_P = \mathbf{X}_0 + \lambda \mathbf{R}_b \Delta \mathbf{R}_{Cam}^b \bar{\mathbf{x}}_P^{Cam}$.



7. Direkte Georeferenzierung

7.3 Erreichbare Genauigkeiten und Anwendungsbeispiel



Zur Zeit sind weltweit nur sehr wenige integrierte GPS/inertial-Module verfügbar, welche gemäß ihrer Spezifikationen die für die photogrammetrischen Auswertungen notwendigen Genauigkeiten liefern könnten. Darüber hinaus muss aber untersucht werden, inwieweit die entsprechenden Genauigkeiten auch unter den hoch-kinematischen Umgebungsbedingungen eines operationell durchgeführten Bildflugs erzielt werden können. Daher wurden am Institut für Photogrammetrie (ifp, Uni Stuttgart) in den vergangenen Jahren ausgiebige Untersuchungen durchgeführt, um das Genauigkeitspotenzial kommerziell verfügbarer integrierter high-end GPS/inertial-Systeme im photogrammetrischen Anwendungsfeld (in Kombination mit analogen und digitalen Kamerasystemen) zu untersuchen. Fast alle Tests wurden über einem vom ifp entsprechend signalisierten und gepflegten photogrammetrischen Testfeld Vaihingen/Enz geflogen. Neben diesen Aktivitäten wurden weitere ausführliche Performanceuntersuchungen im Rahmen der OEEPE, mittlerweile umbenannt in **EuroSDR** (<http://83.138.131.106/euroedr/2002/index.htm>), durchgeführt. Ein spezieller Test wurde ausschließlich zur Untersuchung der Genauigkeit der direkten Georeferenzierung und integrierten Sensororientierung durchgeführt.

Vgl. auch EuroSDR Network: Digital Camera Calibration → <http://www.ifp.uni-stuttgart.de/euroedr/index.html> (Project 2003-2006)

Für die vom ifp durchgeführten Genauigkeitsuntersuchungen wurden zwei kommerziell verfügbare GPS/inertial-Systeme typischerweise mit einer analogen Luftbildkamera (Z/I RMK-Top, Weitwinkeloptik) kombiniert und über dem Testfeld geflogen. Zum Einsatz kamen dabei die integrierten GPS/inertial-Systeme

- POS/AV 510 DG der Firma Applanix Corp. Markham, Ontario, Canada (<http://www.applanix.com/>) und
- AEROcontrol-IId der Firma IGI, Kreuztal, Deutschland (<http://www.igi-systems.com/>).

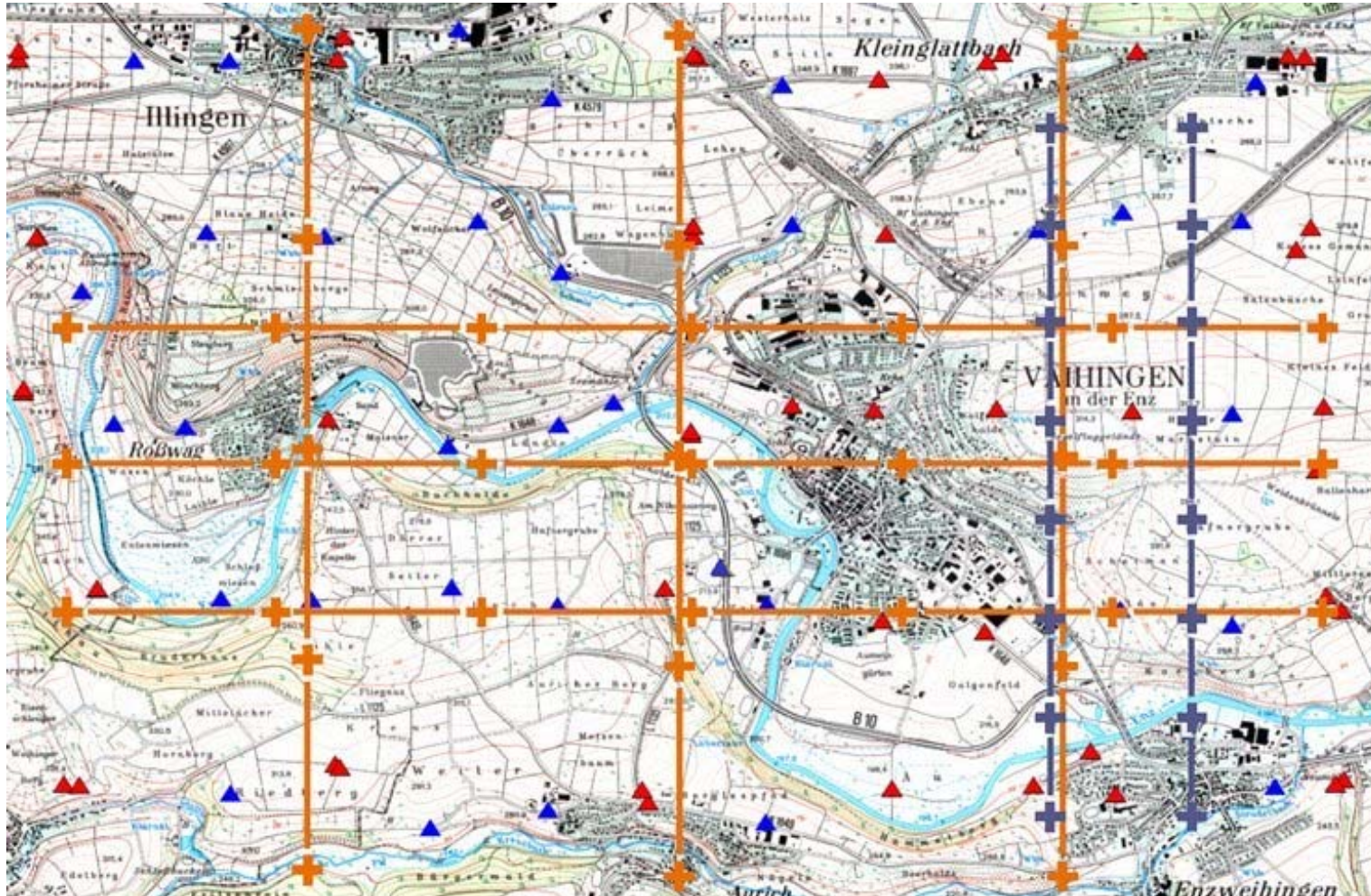
Durch die Kombination mit einer Luftbildkamera können durch klassische AT unabhängige Vergleichswerte für die Orientierungselemente gewonnen werden, die eine erste Abschätzung des Genauigkeitspotenzials der direkten Positions- und Winkelmessung erlauben. Die umfassende Gesamtsystemkontrolle ist aber nur durch unabhängige Kontrollpunkte möglich.

Für die ifp-Testuntersuchungen wurde das Testfeld Vaihingen/Enz, etwa 25 km nord-westlich von Stuttgart, Größe ca. 7 km x 5 km, bis zu 100 signalisierte Kontrollpunkte) vorbereitet. In dem etwa 30 km² großen Gebiet stehen mehr als 100 signalisierte und mit statischem GPS eingemessene Punkte zur Verfügung. Die Genauigkeit dieser Punkte ist höher 5 cm, sodass diese Punkte als unabhängige Kontrolle zur Evaluierung der Gesamtsystemgenauigkeit herangezogen werden können. Neben diesen Punkten liegt für das Gebiet auch ein Referenz-DGM aus einer Laserscannerbefliegung vor, um die Qualität der photogrammetrischen DGM-Generierung abschätzen zu können. Die Verteilung der signalisierten Punkte ist für verschiedenen Bildflugmaßstäbe optimiert. Ein Bildflug im mittleren Maßstab (Weitwinkel, 1:13000, hg=2000 m) erstreckt sich über das gesamte Testgebiet. Für eine Kreuzbefliegung können 36 Bilder in diesem Maßstab erfasst werden. Der großmaßstäbige Bildverband beschränkt sich auf den östlichen Teil der Testfelds und besteht aus 2 in nord-süd Richtung geflogenen Flugstreifen (hg = 1000 m) mit jeweils 8 Bildern/Streifen. Um die Flugzeit zu erhöhen, können die beiden Bildblöcke mehrfach überflogen werden. In der kürzlich vorgenommenen Signalisierungskampagne wurde das Passpunktfeld im westlichen Bereich stark verdichtet, sodass zukünftige großmaßstäbige Bildflüge über diesem Bereich geflogen werden.



7. Direkte Georeferenzierung

7.3 Erreichbare Genauigkeiten und Anwendungsbeispiel



ifp-Testfeld Vaihinge/ENZ mit Standardflugstreifen in unterschiedlichen Bildmaßstäben



7. Direkte Georeferenzierung

7.3 Erreichbare Genauigkeiten und Anwendungsbeispiel



Die detaillierten Ergebnisse der am ifp durchgeführten Testflüge können in verschiedenen Publikationen nachgelesen werden (siehe 1. Seite, Kap. 7).

Aus diesen gut kontrollierten Testflügen am ifp konnte für die direkte Georeferenzierung von RMK-Bildern unter Verwendung einer optimalen Gesamtsystemkalibrierung eine Objektpunktgenauigkeit von **5-20 cm (RMS) für die horizontale** und **10-25 cm (RMS) für die vertikale Komponente** erreicht werden. Die Variation in der Genauigkeit ist im wesentlichen abhängig von den verschiedenen untersuchten Blockgeometrien – eine große Bildüberdeckung liefert eine starre Blockgeometrie mit einer großen Zahl von multi-ray Punkten, die sich positiv auf die Genauigkeit der Punktbestimmung auswirken. Durch die größere Zahl von Beobachtungen können Restfehler in den GPS/inertial-Orientierungselementen kompensiert werden. Die erzielte Genauigkeit ist bemerkenswert und für einen großen Teil der Anwendungen ausreichend.

System	# Images	# ChP	RMS [cm]			Max. Deviation [cm]		
			ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ
POS/DG	36, +	135	6.4	9.0	15.7	20.0	31.9	37.1
	7,	84	15.0	13.9	23.9	30.8	47.3	63.7
	7,	95	7.1	16.1	25.2	22.8	35.2	59.0
AERO control	36, +	84	7.5	12.1	12.1	19.3	37.8	34.4
	7,	50	12.8	9.7	18.7	24.1	27.9	55.4
	7,	49	8.5	8.4	17.2	21.0	18.4	43.2

Genauigkeit der direkten Georeferenzierung (Bildmaßstab 1:13.000, hg=2000m)

+ ... Kreuzbefliegung



7. Direkte Georeferenzierung

7.3 Erreichbare Genauigkeiten und Anwendungsbeispiel



Generell können aus den Genauigkeitsuntersuchungen die folgenden allgemeinen Schlussfolgerungen – mit Schwerpunkt auf der Rolle der GPS/inertial-Komponenten als ein Teil des Gesamtsystems – gezogen werden:

- Die direkte Georeferenzierung unter Verwendung von GPS/inertial-Systemen erlaubt eine **hohe Flexibilität**, da dieses Verfahren zunächst mit jedem Sensor kombiniert werden kann (flächen-/zeilenhaft erfassend, analog/digital). Es gibt **keine Einschränkungen bezüglich regelmäßiger Blockstrukturen**, die bei der Befliegung einzuhalten sind. Da es **keine Notwendigkeit der Punktübertragung** zwischen den Bildern mehr gibt, können mit der direkten Georeferenzierung auch Bilder ausgewertet werden, bei denen die klassischen Punktübertragung und Auswertung Schwierigkeiten hat, z.B. in Küstenbefliegungen und bei Flügen über dichten Waldgebieten. Die Verwendung von GPS/inertial-Daten zur Orientierung von Zeilenscannern (z.B. ADS40) ist essenziell für eine effiziente Datenauswertung.

- **Die direkte Bestimmung der äußeren Orientierung mit qualitativ hochwertigen GPS/inertial-Systemen kann hohe Genauigkeiten erzielen**, die nahe bei den Genauigkeiten der photogrammetrischen Auswertung liegen – allerdings muss dazu eine korrekte Prozessierung der GPS/inertial-Daten (mit effizienter GPS/inertial-Fehlerkontrolle, richtige Transformation zwischen den verschiedenen Bezugssystemen, Datumsproblematik) und eine angemessene Gesamtsystemkalibrierung (GPS/inertial-Komponenten inklusive Selbstkalibrierung der Kamera) für das entsprechende Befliegungsgebiet vorausgesetzt werden.

- **Die direkte Georeferenzierung ohne jegliche Passinformation am Boden ist möglich, aber hochgradig unzuverlässig, da nicht korrigierte systematische oder grobe Fehler nicht aufgedeckt werden können und die Qualität der direkten Georeferenzierung signifikant verschlechtern.** Vor diesem Hintergrund sollte die Verwendung einiger weniger Kontrollpunkte im eigentlichen Befliegungsgebiet vorgesehen werden, die eine Abschätzung und Kontrolle der Systemgenauigkeit erlauben. Wenn aus dieser Abschätzung Fehler entdeckt werden, können diese Kontrollpunkte als Passpunkte in eine integrierte Sensororientierung eingeführt werden, um die Fehlereinflüsse zu bereinigen.

Das große Potenzial der direkten Georeferenzierung ist nicht von der Hand zu weisen. Diese Technologie wird einen großen Einfluss auf den Prozess der Sensororientierung haben. Dennoch leiden die bisher durchgeführten Testflüge an verschiedenen Punkten: In der Regel gibt es keine getrennten Kalibrier- bzw. eigentliche Testfelder, d.h. die Kalibrierung wird in dem Gebiet durchgeführt in dem später auch die Genauigkeit des Systems abgeschätzt wird. Dieser Punkt unterscheidet sich von der späteren Anwendung im praktischen Alltag. Weiterhin werden die akademischen Tests sehr sorgfältig geplant und durchgeführt, um das maximale Genauigkeitspotenzial abschätzen zu können. Dazu werden bei der Datenerfassung sehr flache Kurven geflogen, um eine gute Satellitenkonfiguration zu gewährleisten. Die Prozessierung und Systemkontrolle wird sehr genau und zeitaufwendig von Experten vorgenommen (z.T. sogar von den Systemherstellern persönlich). Auch diese Punkte lassen sich nicht ohne Weiteres auf die praktische Anwendung übertragen. Daraus ist klar ersichtlich, dass sich die Resultate dieser akademisch durchgeführten Genauigkeitstests zunächst nur bedingt auf eine Genauigkeitsaussage von GPS/inertial-Systemen in der operationellen Praxis verallgemeinern lassen. Daher sind umfassende Tests unter Praxisbedingungen notwendig, um die Systemgenauigkeit auch in diesem Umfeld zu verifizieren.



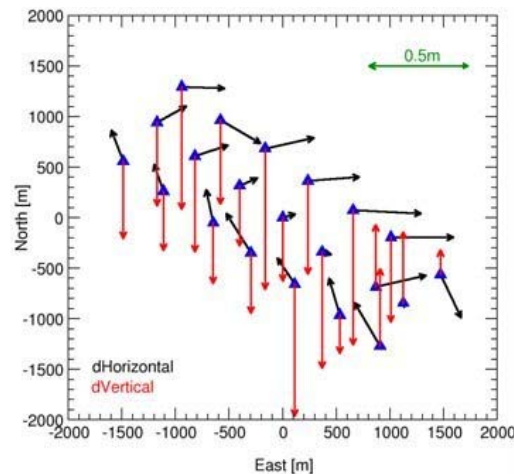
7. Direkte Georeferenzierung

7.3 Erreichbare Genauigkeiten und Anwendungsbeispiel

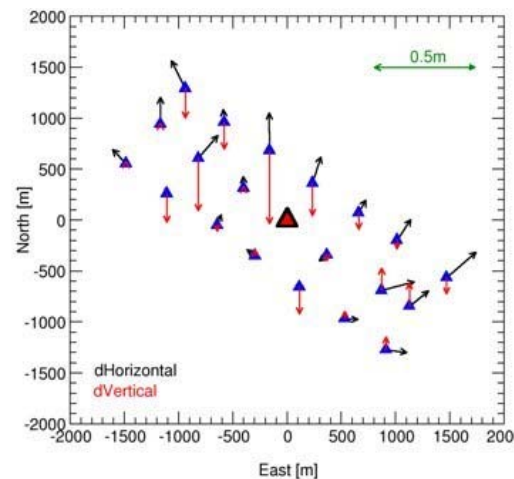


Erste Resultate derartiger Untersuchungen liegen mittlerweile vor und zeigen, dass im Prinzip auch im operationellen Umfeld das aufgezeigte Genauigkeitspotenzial erreicht werden kann. Allerdings ist auch hier eine **korrekte Gesamtsystemkalibrierung** essenziell. Diese Systemkalibrierung sollte im Idealfall auch für mehrere Flugmissionen Gültigkeit besitzen, was zumindest für die Stabilität der Boresightmisalignemt-Winkel zuzutreffen scheint, solange keine Veränderungen an der Gesamtsysteminstallation vorgenommen werden. Eine a priori Langzeitkalibrierung von Positionsfehlern ist problematischer. Die Erfahrungen von verschiedenen operationelle Kalibrierungen haben signifikante Offsets vor allem in den Vertikalkomponenten gezeigt, die für verschiedene Flugtage unterschiedlich ausfallen. Werden diese Variationen in einer Vorabkalibrierung nicht korrekt berücksichtigt, wirkt sich dieses sofort auf die Qualität der Objektpunktbestimmung nach direkter Georeferenzierung aus. Darüber hinaus wurde in einigen Fällen aufgrund fehlerhafter Verarbeitung der GPS/inertial-Daten das Potenzial des integrierten Systems nicht ausgeschöpft. Dieses ist natürlich kein Defizit dieser Technologie an sich, zeigt aber, dass auch im operationellen Gebrauch dieser Systeme genügend Sorgfalt in die Analyse und Prozessierung der Daten investiert werden muss. Die Erfahrungen der Operateure werden zwar mit zunehmender Verwendung dieser Systeme in der Praxis steigen, dennoch wird es immer Projekte geben, bei denen das geforderter Genauigkeitspotenzial durch alleinige direkte Georeferenzierung nicht erreicht werden kann. In diesen Fällen können die GPS/inertial-Daten im Rahmen einer integrierten Sensororientierung (ISO) verwendet werden.

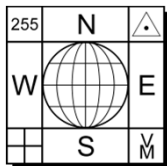
Integrierte Sensororientierung ist der effizienteste Weg zur Gesamtsystemkalibrierung und Kompensation von Restfehlern unter Verwendung einer sehr geringen Anzahl von Passpunkten. Der große Einfluss dieser Vorgehensweise soll abschließend in einem Beispiel gezeigt werden. Die nachfolgenden Bilder zeigen die Objektraumresiduen an unabhängigen Kontrollpunkten nach direkter Georeferenzierung (DG) und integrierter Sensororientierung (ISO). Der gezeigte Block besteht aus einer einzelnen Fluglinie mit 7 Bildern (RMK, Normalwinkel, großer Bildmaßstab). Durch die integrierte Sensororientierung kann die Objektpunktgenauigkeit signifikant gesteigert werden. Dieses Ergebnis wird durch die Verwendung eines einzigen Passpunkts in der Mitte des Flugstreifens erzielt. Dieser eine Passpunkt ist ausreichend, um die Systemkalibrierung auf die Bedingungen in diesem Missionsgebiet anzupassen.



Objektgenauigkeit nach direkter Georeferenzierung



Objektgenauigkeit nach integrierter Georeferenzierung



7. Direkte Georeferenzierung

7.4 Einfluss des Koordinatensystems (Gauß-Krüger)



Der Einfluss der Definition der Landeskoordinaten auf die photogrammetrische Triangulation (indirekte Georeferenzierung) wurde bereit 1959 von Prof. K. Rinner (Graz) diskutiert (DGK Reihe A, 34).

Für die direkte Georeferenzierung wurde diese Problematik erneut aufgegriffen und untersucht, u.a. durch C. Ressler: Direkte Georeferenzierung von Luftbildern in konformen Kartenabbildungen. ÖZfVuG, 89. Jg., Heft 2, S. 72-82, 2001.

Einleitung:

Die photogrammetrischen Beziehungen (z.B. die Formel der Zentralprojektion) beziehen sich auf ein **kartesisches Koordinatensystem**. Aus diesem Grund sollte die (direkte bzw. indirekte) Georeferenzierung auch in einem solchen System durchgeführt werden, z.B. in einen passend gewählten Tangentialkoordinatensystem. Da aber die Endergebnisse (Höhenmodell, etc.) letztendlich im System der Landesvermessung anzugeben sind, erfolgt die Georeferenzierung oft gleich in diesem System. Da das Landeskoordinatensystem auf einer Abbildung der gekrümmten Erdoberfläche basiert, bei der prinzipiell Verzerrungen nicht vermieden werden können, erhebt sich die Frage: Welche Fehler entstehen in den Objektpunkten, wenn die direkte bzw. indirekte Georeferenzierung im System der Landesvermessung durchgeführt wird?

Die Gauß-Krüger-Abbildung ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

1. Die Abbildung ist winkeltreu.
2. Es werden nur schmale Streifen (in Österreich: $L=1.5^\circ$) westlich und östlich eines Mittelmeridians abgebildet.
3. Der Mittelmeridian wird streckentreu als Gerade abgebildet.

Die Ellipsoidhöhe H wird unverändert als Höhenkoordinate in das Landeskoordinatensystem übernommen.

- ⇒ Die windschiefen Ellipsoidnormalen werden parallel ausgerichtet.
- ⇒ Je weiter man sich vom Mittelmeridian entfernt, desto mehr unterscheiden sich Lage- und Höhenmaßstab.

Aus diesem Grund stellt das Landeskoordinatensystem kein kartesisches Bezugssystem dar!

Die UTM-Abbildung entspricht einer Gauß-Krüger-Abbildung, wobei die Streifenbreite auf $\pm 3^\circ$ vergrößert wird. Um den Einfluss der Streckenverzerrung am Streifenrand zu verringern, werden die Lagekoordinaten um den Faktor 0.9996 künstlich verkleinert.

1. Möglichkeit: "saubere" Lösung → AT in einem kartes. Hilfskoord.-system (z.B. Tangentialkoord.-system) durchführen; anschließend Rücktransformation.
2. Möglichkeit: AT im Landessystem mit entsprechenden Korrekturen für die Modellierung der geometrischen Diskrepanzen.

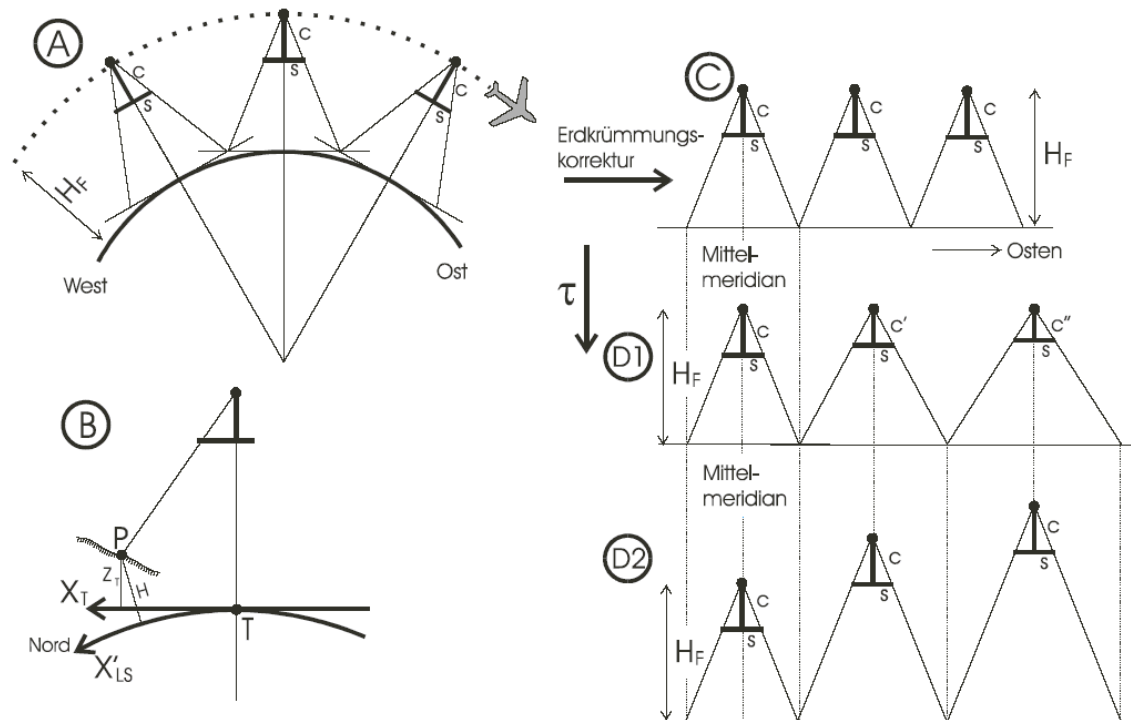
Streckenverzerrung τ im Abstand Y_{LS} vom Bezugsmeridian:

$$\tau = 1 + \frac{Y_{LS}^2}{2R^2} + \frac{Y_{LS}^4}{24R^4} \quad \text{mit} \quad R = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 B}$$
$$c = \frac{a^2}{b} \quad , \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$



7. Direkte Georeferenzierung

7.4 Einfluss des Koordinatensystems (Gauß-Krüger)



Flugstreifen im Landeskoordinatensystem

- (A)
 - Flug von W nach E
 - Approximation der Ellipse durch eine Kugel
 - Flug in konstanter Ellipsoidhöhe H_F
 - c ... Kamerakonstante
 - s ... Bildformat
 - Annahme einer exakten Senkrechtaufnahme
 - T ... Normalenfußpunkte der Projektionszentren
- (B)
 - Übergang in ein kartesisches Tangentialkoordinatensystem durch Verebnung mittels "Erdkrümmungskorrektur"; diese kann im Objekt- bzw. Bildraum erfolgen.
- ⇒ Situation (C)
- Kompensation der Streckenverzerrung τ bei
 - (D1) durch die Kamerakonstante $c \rightarrow H_F = \text{const.}$
 - (D2) durch Zunahme von H_F nach Osten.

Es entstehen drei Probleme, wenn man eine AT nach der Bündelmethode im System der Landesvermessung berechnen will:

- P1) Effekt der Erdkrümmung
- P2) Unterschied zwischen Lage- und Höhenmaßstab
- P3) kontinuierliche Veränderung des Lagemaßstabes im Blockgebiet in lateraler Richtung

Problem P1 kann durch die sog. **Erdkrümmungskorrektur** beseitigt werden.

Die Antworten auf die Probleme P2 und P3 werden getrennt für die indirekte und direkte Georeferenzierung auf den folgenden Seiten gegeben.

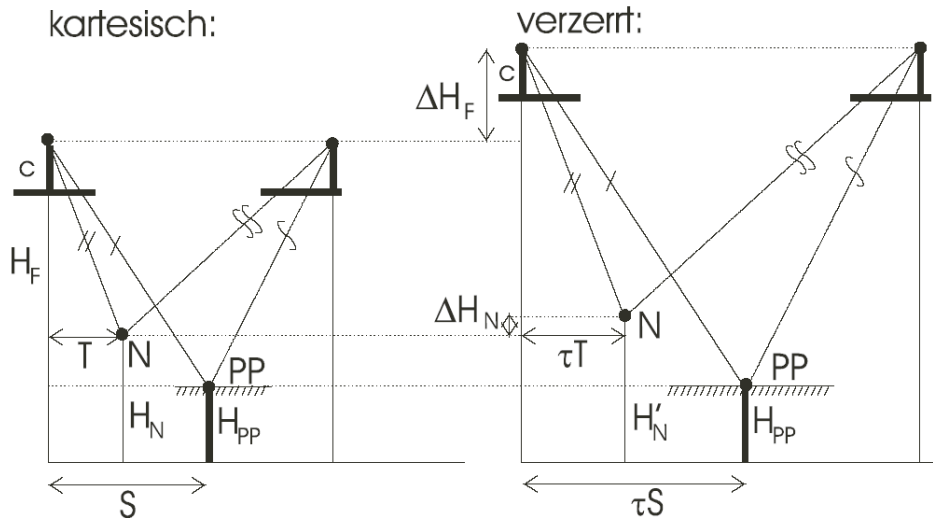


7. Direkte Georeferenzierung

7.4 Einfluss des Koordinatensystems (Gauß-Krüger)

Indirekte Georeferenzierung in konformen Kartenabbildungen:

Innere Orientierung aus dem Kalibrierungsprotokoll.
 Die äußere Orientierung wird indirekt aus Pass- und Verknüpfungspunkten abgeleitet.
 P1 sei über die Erdkrümmungskorrektur behoben.



Indirekte Georeferenzierung mit konformen Strahlenbündeln

$$\frac{H_F - H_{PP}}{S} = \frac{H_F + \Delta H_F - H_{PP}}{\tau \cdot S} \rightarrow \Delta H_F = (\tau - 1) \cdot (H_F - H_{PP})$$

$$\frac{H_F - H_N}{T} = \frac{H'_F - H'_N}{\tau \cdot T} = \frac{H_F + \Delta H_F - H_N - \Delta H_N}{\tau \cdot T} \rightarrow$$

$$\Delta H_N = (\tau - 1) \cdot (H_N - H_{PP})$$

Die Projektionszentren erfahren eine Höhenversetzung ΔH_F proportional zur Flughöhe über Grund.
 \Rightarrow berechnete Flughöhe ist immer größer als in der Wirklichkeit.

Für Neupunkte ober- oder unterhalb des Bezugsniveaus H_{PP} erhält man Fehler ΔH_N in den Neupunkten H_N proportional zum Höhenunterschied $(H_N - H_{PP})$.

\Rightarrow Im Hochgebirge wird der Fehler entsprechend größer.

Zahlenbeispiel: $c = 150 \text{ mm}$, $m_b = 1:10.000 \rightarrow (H_F - H_{PP}) = 1.5 \text{ km} \rightarrow \Delta H_F = 40 \text{ cm}$ (am Rand des Überlappungsbereichs; $L = 2^\circ$)
 Für $(H_N - H_{PP}) = 300 \text{ m}$ ergibt sich $\Delta H_N = 8 \text{ cm}$.
 Vgl. dazu die zu erwartende Höhenunsicherheit der Auswertung: $0.06\% \times (H_F - H_{PP}) = 9 \text{ cm}$

Schlussfolgerung: Bei konformen Kartenabbildungen ist der Einfluss der Lageverzerrungen (d.h. P2 und P3) auf die Neupunkte der AT von erdkrümmungskorrigierten Bildern i. Allg. (nicht im Hochgebirge) vernachlässigbar.



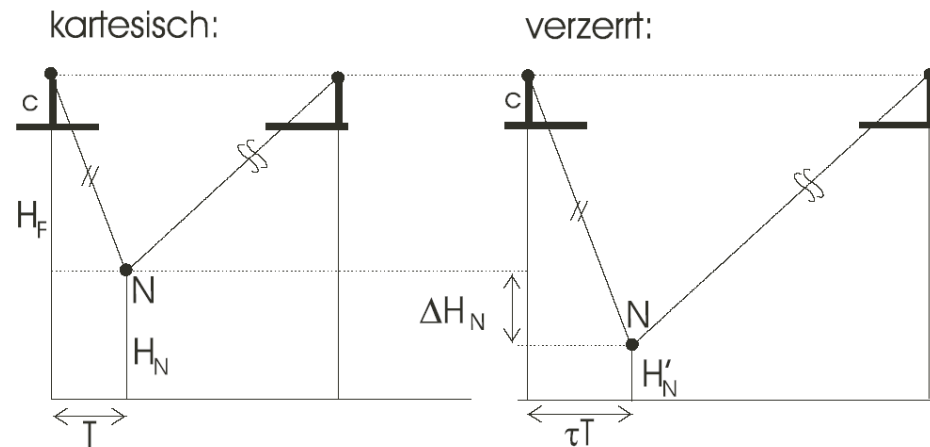
7. Direkte Georeferenzierung

7.4 Einfluss des Koordinatensystems (Gauß-Krüger)



Direkte Georeferenzierung in konformen Kartenabbildungen:

Innere Orientierung aus dem Kalibrierungsprotokoll. Gemessene Bildkoordinaten von Neupunkten.
 Die äußere Orientierung ist in Bezug auf das Landeskoordinatensystem gegeben.
 P1 sei über die Erdkrümmungskorrektur behoben.



$$\frac{H_F - H_N}{T} = \frac{H_F - H'_N}{\tau \cdot T} = \frac{H_F - H_N - \Delta H_N}{\tau \cdot T} \rightarrow$$

$$\Delta H_N = (1 - \tau) \cdot (H_F - H_N)$$

Neupunkte erhalten Höhenfehler ΔH_N proportional zur Aufnahmeentfernung und da $H_F > H_N$ und $\tau > 1$ bei Gauß-Krüger-Abbildung, liegen die Neupunkte immer zu tief.

Direkte Georeferenzierung mit konformen Strahlenbündeln

Zahlenbeispiel: Beispiel von vorhin. Aufnahmeentfernung $(H_F - H_{pp}) = 1.5 \text{ km} \rightarrow \Delta H_N = 40 \text{ cm}$
 Vgl. dazu die zu erwartende Höhenunsicherheit der Auswertung: $0.06\% \times (H_F - H_{pp}) = 9 \text{ cm}$

Schlussfolgerung: Im Gegensatz zur indirekten Georeferenzierung sind die Höhenverfälschungen bei der direkten Georeferenzierung im Landeskoordinatensystem nicht zu vernachlässigen.

- Lösungsmöglichkeiten:
- M1) Berechnung in einem Tangentialkoordinatensystem
 - M2) Korrektur der Ellipsoidhöhen
 - M3) Korrektur der kalibrierten Kamerakonstante



7. Direkte Georeferenzierung

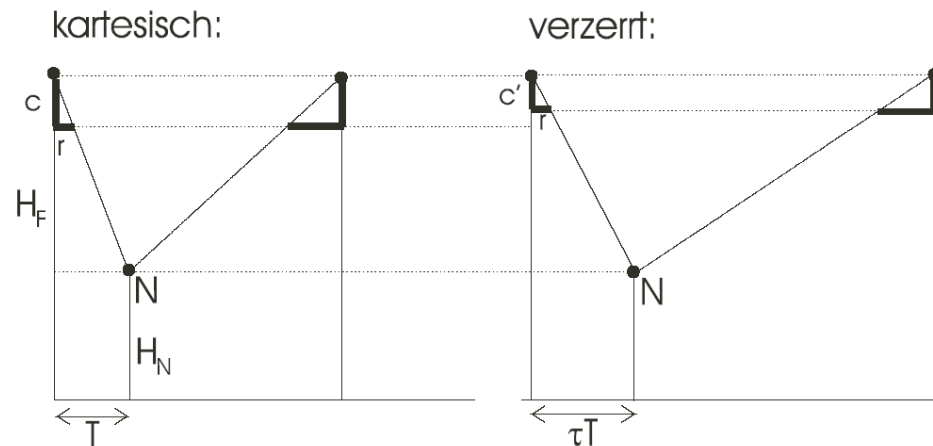
7.4 Einfluss des Koordinatensystems (Gauß-Krüger)

Diskussion M1, M2, M3:

Methode M1: "Sauberste" Variante. Unter Umständen kann es hier in größeren Gebieten zu kleineren Problemen bei der Refraktionskorrektur kommen, bei der im Allgemeinen angenommen wird, dass die Lotrichtung mit der Z-Richtung des Bezugssystems übereinstimmt.

Methode M2: Näherungslösung. Bei dieser Methode bleibt die Kamerakonstante unverändert, jedoch werden alle in die Berechnung eingehenden Höhen um den entsprechenden Lagemaßstab korrigiert ($H_{\text{korrr}} = H_{\text{Ell}}\tau$). Vereinfachung: τ_{global} für die Gebietsmitte bei kleineren Projektgebieten. In diesem Fall wird nur P2 behoben und P3 vernachlässigt. Diese Methode hat allerdings den Nachteil, dass alle Ergebnisse um τ wieder "entkorrigiert" werden müssen.

Methode M3: Näherungslösung. Bei dieser Methode bleiben die Ellipsoidhöhen unverändert, jedoch wird die Kamerakonstante c angepasst, eigentlich verfälscht.



Änderung der Kamerakonstante

$$\frac{H_F - H_N}{T} = \frac{c}{r} = \frac{H_F - H_N}{\tau \cdot T} = \frac{c'}{r} \rightarrow c' = \frac{1}{\tau} c$$

In Abhängigkeit von der Gebietsgröße könnte man auch hier ein entsprechendes c_{global} einführen. Korrektur gilt nur streng für Senkrechtaufnahmen.

Schlussfolgerung:

Methode M1 stellt sicher die sauberste Lösung dar, da hier ein kartesisches Bezugssystem verwendet wird, allerdings fallen hier die Ergebnisse nicht sofort im System der Landesvermessung an und müssten somit erst in dieses transformiert werden. Jedoch sollte das bei der heutzutage verfügbaren Computerunterstützung kein echtes Problem darstellen. Verbleibt die Berechnung im Landeskoordinatensystem, so stellen die letzten beiden Methoden M2 und M3 Näherungslösungen dar und könnten im Rahmen einer erweiterten Erdkrümmungskorrektur während der AT und der anschließenden Stereoauswertung durchgeführt werden.



7. Direkte Georeferenzierung

7.5 Anwendung in der terrestrischen Photogrammetrie

Das Projekt NEXUS zielt auf die Entwicklung einer Plattform zur Unterstützung von ortsbewussten Applikationen (location aware applications) hin.



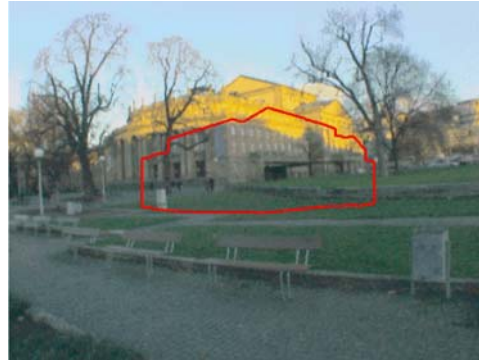
Positionierung eines mobilen Nutzers im Außenraum einer Stadt:

Positionierungskomponenten:
(System MAPSTAR-LADIS)

- DGPS (2-5 m Lagegenauigkeit)
- digitaler Kompass
- Neigungsmesser
- Entfernungsmesser
- (INS, Schrittzähler, etc.)

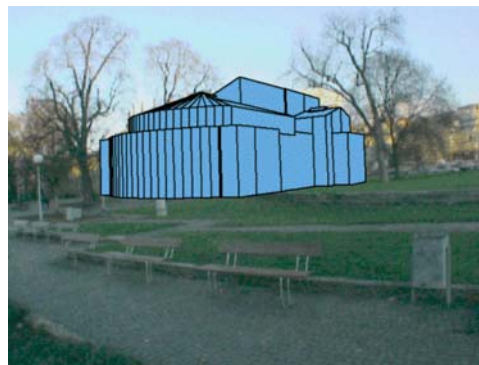
Bildinformation:

- Digital-/Videokamera

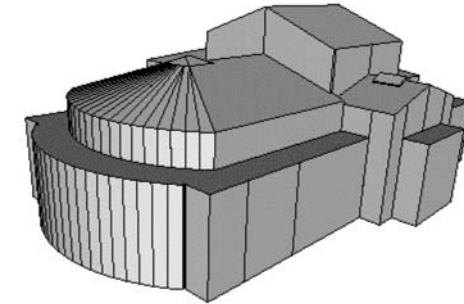


Mit Hilfe der Positionierungskomponenten wird die EO der Aufnahmekamera des Zeigergerätes berechnet. Anschließend wird für die errechnete Blickrichtung der Umriss des aus dem 3D-Stadtmodell identifizierten Objektes in das aufgenommene Bild projiziert.

Aufgrund der ungenauen EO ist der rückgerechnete Umriss lageversetzt.



Verbesserung der EO durch Matching (Generalized Hough Transformation) der Bild-Silhouette mit der simulierten → Passelemente → räuml. Rückwärtsschnitt → Iteration.



3D-Modell zur Erzeugung der Silhouette (= Objekt des 3D-Stadtmodells von Stuttgart) - automatische Generierung des 3D-Stadtmodells aus Luftbildern und Laserscannerdaten.

Anwendungsbeispiele:

- Phototexturierung von 3D-Stadtmodellen (straßenseitige Fassaden)
- LBS ("Was ist das für ein Gebäude?")

Quelle: <http://www.ifp.uni-stuttgart.de/>



7. Direkte Georeferenzierung

Anmerkungen

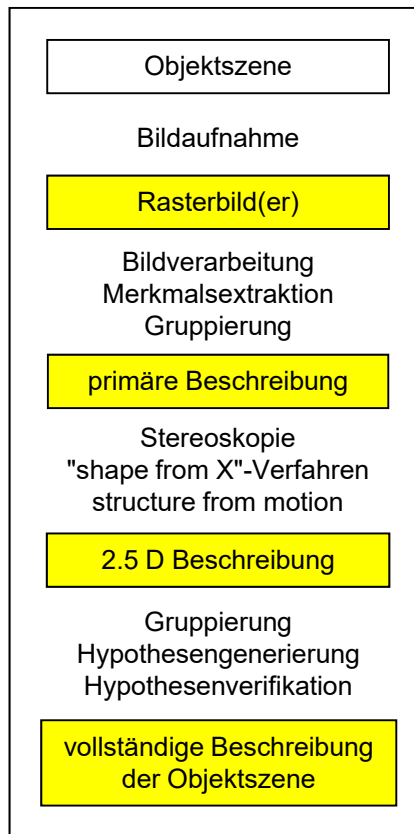




8. Bildzuordnungsverfahren

8.1 Einleitung

Eine automatische oder automatisierte Auswertung digitaler Bilder ist in der Photogrammetrie seit langem ein wichtiger Forschungsgegenstand. Der Weg dahin führt über die **Bildanalyse**, auch **Bildverstehen**, genannt. A. Rosenfeld (1982) spricht von einer automatischen "Generierung einer sinnvollen Beschreibung für die in den Bildern dargestellte Objektszene".



Bildanalyse nach
D. Marr (1982) bzw. T. Schenk (1993)



... wichtigsten Repräsentationsformen für visuelle Informationen

Bildverarbeitung → vor allem Kanten- und Linienextraktion
Gruppierungsvorgänge → Auffinden paralleler Kanten



Ergebnis. 2D; enthält punkt-, linien- und flächenhafte Strukturen

Weiterverarbeitung der primären Beschreibung zu lokaler dreidimensionaler
Forminformation durch Ausnutzung der Stereoskopie und anderer "shape from X"-Verfahren,
wie z.B. shape from shading, focus, texture, etc.



Überführung dieser lokalen Forminformation in ein gemeinsames
dreidimensionales Koordinatensystem.
Gruppierung in 3D



Vergleich der gewonnenen Objekte und Objektteile mit abgespeicherten Modellen
der zu erkennenden Objekte mittels Hypothesengenerierung und – verifikation
(= **allgemeines Korrespondenzproblem**).

Quelle: Ch. Heipke, 1995: Digitale photogrammetrische Arbeitsstationen. DGK, Reihe C, Nr. 450.

D. Marr, 1982: Vision. Freeman, New York.

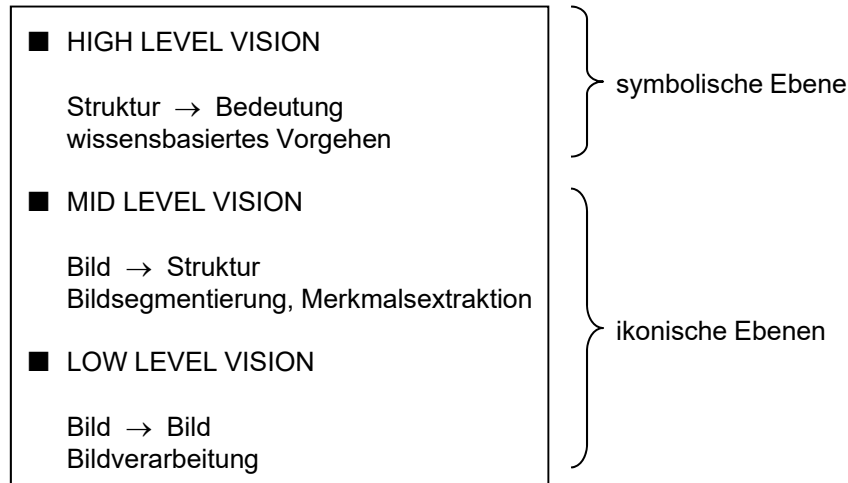
T. Schenk, 1993: Image understanding and digital photogrammetry. PhoWo 1993, Wichmann V.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.1 Einleitung

Nach einer anderen Unterteilung (L.G. Shapiro & R.M. Haralick, 1987: Relational Matching. Applied Optics (26), 10, 1845-1851) lässt sich die Bildanalyse in drei Ebenen gliedern:



Ebenen der Bildanalyse (aus Ch. Heipke, 1995)

Bemerkungen:

- low level vision: Helligkeits- und Kontrastverbesserung, Histogrammanpassung, Filterung, Fouriertransformation. Allen Operationen ist gemeinsam, dass Eingangs- und Ausgangsinformation Bilder im Sinne von Rasterdaten sind.
- mid level vision: z.B. Punkt- und Kantenextraktion, Texturanalyse.
Aus Bildern als Eingangsinformation werden Strukturen, häufig in Form von Vektordaten abgeleitet.
In den beiden unteren Ebenen wird Wissen *problemunabhängig* verwendet: So steckt z.B. in jedem Filter implizit Wissen über die vorhandenen Frequenzen der Grauwertfunktion und das erwartete Rauschen.
- high level vision: Die Bedeutung der Strukturen spielt eine entscheidende Rolle.
Wissensbasiertes Vorgehen mit einer expliziten und formalen Darstellung des Wissens in Form von Regeln, semantischen Netzen oder Grammatiken.
Es wird problemorientiertes Wissen verwendet.

Bei der Durchführung der Bildanalyse ist der Übergang von einer Ebene zur anderen oft fließend.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.1 Einleitung



Grundsätzlich unterscheidet man zwischen **datengetriebener** und **modellgetriebener Vorgangsweise**. Während erstere versucht, aus den Bildern Strukturen zu extrahieren und diesen hernach Bedeutung zuzuweisen, geht letztere von Objektmodellen aus, die ins Bild projiziert werden. ⇒ nur eine Kombination von daten- und modellgetriebener Vorgangsweise hat Chance auf Erfolg.

In letzter Zeit wird das Paradigma der **aktiven Bildanalyse** vermehrt Aufmerksamkeit gewidmet. Bildaufnahme und –auswertung werden weitgehend integriert, je nach Notwendigkeit können zusätzliche Bilder mit unterschiedlicher Bedeutung, Auflösung, Fokussierung und/oder von unterschiedlichen Standpunkten aus aufgenommen und zusammen mit den bereits vorhandenen Bildern verarbeitet werden. In der Nahbereichsphotogrammetrie kann diese Vorgangsweise für gewisse Aufgabenstellungen angewendet werden. Für die Luftbildphotogrammetrie ist sie dagegen nicht geeignet.

Zusammenfassend muss aber festgestellt werden, dass eine vollkommen automatisch ablaufende Bildanalyse für in der Photogrammetrie typische Bilder in absehbarer Zeit nicht realisierbar ist.

⇒ Möglichkeit zur semi-automatischen Auswertung mit interaktiver Steuerung, Kontrolle und Verbesserung automatisch ablaufender Vorgänge.

	Stimulus	Gruppierung	
Nähe			In mehreren der angesprochenen Schritte spielt die Gruppierung von Information zu sinnvollen größeren Einheiten (perceptual grouping oder perceptual organisation) eine wesentliche Rolle.
Ähnlichkeit			Die Gruppierung ist definiert als "die Fähigkeit des visuellen Systems, schnell Strukturen und Ähnlichkeiten in ansonsten zufällig verteilten Elementen, Merkmalen oder Mustern wahrzunehmen".
Kontinuität			Die Ergebnisse der Gruppierung sind zum einen Beziehungen zwischen wahrgenommenen Merkmalen (abstrakte Beziehungen zwischen wahrgenommenen Merkmalen) und zum anderen die Unterteilung der Eingangsdaten in wichtige und weniger wichtige Teilbereiche (<i>focus of attention</i>).
Abgeschlossenheit			Die Gruppierung der Elemente geschieht im wesentlichen gemäß den Gesetzen der Gestalttheorie aus der Psychologie.
Symmetrie			

Beispiele zur Gruppierung, aus Y.J. Zheng (1992)



8. Bildzuordnungsverfahren

8.1 Einleitung

Verfahren der Bildzuordnung (**image matching**) lösen die Aufgabe, identische Objektmerkmale (Punkte, Muster, Kanten) in zwei oder mehr Bildern des Objektes zu identifizieren und einander eindeutig zuzuordnen. Zuordnungsverfahren werden unter anderem benötigt für:

- Identifikation diskreter (signalisierter) Bildpunkte zur 3D-Punktmessung
- Identifikation homologer Bildpunkte zur 3D-Oberflächenrekonstruktion (→ Bildzuordnung → Oberflächenzuordnung)
- Identifikation und Verfolgung von Objekten in Bildsequenzen (vgl. Blockgletscher-Monitoring)

Beispiele:



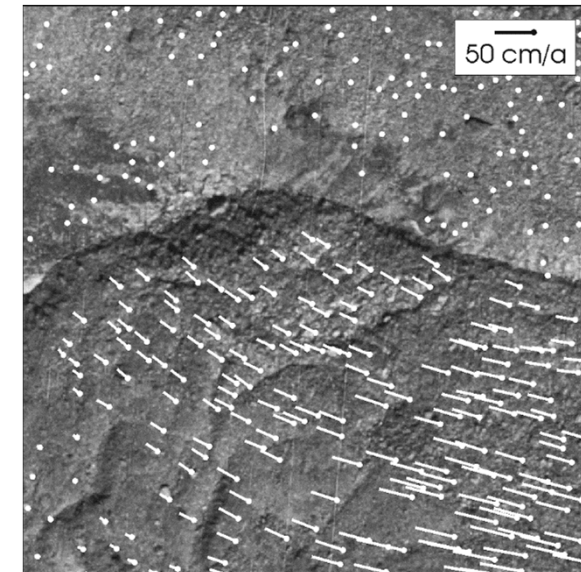
AICON-Testtafel mit Code-Marken



Bestimmung von Verformung und Ausdehnung



Objektrekonstruktion



Blockgletscher-Monitoring



8. Bildzuordnungsverfahren

8.1 Einleitung

Das Problem der automatischen Zuordnung korrespondierender Bildmerkmale ist eine der ältesten, aber dennoch eine der aktuellsten Fragestellungen des **Computersehens** (*Computer Vision*). Die Korrespondenzanalyse ist eine der Grundvoraussetzungen für das Verstehen räumlicher Bildszenen und damit eng verbunden mit der Wirkungsweise des menschlichen visuellen Systems. Während digitale Bildzuordnungsverfahren für geeignet strukturierte Objektszenen (z.B. durch Verwendung signalisierter Marken oder projizierter Muster) die Leistungsfähigkeit des Menschen in speziellen Bereichen (Messgenauigkeit, Verarbeitungsgeschwindigkeit) bereits übertreffen können, ist die Analyse beliebiger Objektszenen noch Gegenstand intensiver Forschungsarbeiten.

Die Korrespondenzanalyse gehört in die Klasse der schlecht gestellten Probleme (*ill-posed problems*), d.h. es ist nicht sicher, ob eine Lösung überhaupt existiert, die eindeutig und robust gegenüber von Variationen in den Eingangsdaten ist. Bei der Zuordnung beliebige Szenen können prinzipiell folgende Probleme auftreten:

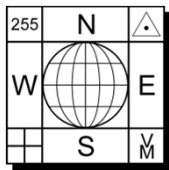
- zu einem Bildpunkt P_{ij} (Punkt i im Bild j) existiert aufgrund von Verdeckungen kein homologer Punkt P_{ik}
- zu einem Bildpunkt P_{ij} existieren aufgrund von mehrdeutigen Objektstrukturen oder durchsichtigen Oberflächen mehrere Kandidaten P_{ik}
- in texturarmen Bildregionen wird die Lösung instabil oder empfindlich gegenüber kleinen Bildstörungen (Rauschen).

Praktikable Lösungen gehen in der Regel davon aus, dass folgende Voraussetzungen an Objekt und Bildaufnahme weitgehend erfüllt sind:

- die Intensität aller beteiligten Bilder im gleichen spektralen Bereich
- konstante Beleuchtung, atmosphärische Verhältnisse und Medienübergänge für den Zeitraum der Bildanalyse
- formstabile Objektoberfläche für den Zeitraum der Bildaufnahme
- stückweise glatte Objektoberfläche
- undurchsichtige Objektoberfläche
- weitgehend diffuse Reflexion an der Oberfläche
- bekannte Näherungswerte für Orientierungsdaten (Bildüberlappung) und Objektdaten (geometrische und radiometrische Parameter).

Die verschiedenen Bildzuordnungsverfahren lassen sich wie folgt einteilen:

- (1) **Bildzuordnung auf der Basis von Grauwerten**
(flächenbasierte Zuordnung, *area-based matching*)
- (2) **merkmalsbasierte Zuordnung oder Merkmalszuordnung**
(*feature-based matching*)
- (3) **relationale Bildzuordnung** (in der Photogrammetrie eher keine Anwendung)



8. Bildzuordnungsverfahren

8.2 Flächenbasierte Verfahren (area-based matching)



Unter Korrelationsverfahren werden hier solche Methoden verstanden, die ein Ähnlichkeitsmaß zwischen einem **Musterbild (Mustermatrix, Referenzmatrix) $f(x,y)$** und einem **Suchbild (Suchmatrix, Messbild) $g(x,y)$** berechnen. Die Stelle der besten Übereinstimmung wird mit der Position des zu suchenden Musters gleichgesetzt.

Zur Berechnung der Ähnlichkeit von zwei Grauwertmatrizen kann die allgemeine Normdefinition herangezogen werden, wobei der Index p die entsprechende Norm bezeichnet.

$$I_p = (\sum (f - g)^p)^{\frac{1}{p}}$$

(1) $p=1$, L_1 -Norm, mittlerer absoluter Fehler (**sum of absolute differences, SAD**) → MAD ... median of absolute differences (robust version)

Minimale Summe der Absolutwerte der Grauwertdifferenzen: $\sum |f - g| = \text{Minimum}$

(2) $p=2$, L_2 -Norm, mittlerer quadratischer Fehler (**sum of squared differences, SSD**) → MSD ... median of squared differences (robust version)

$$\sum (f - g)^2 = \text{Minimum}$$

Mit dem mittleren quadratischen Fehler wird die Energie der Bilddifferenz minimiert. Der Fehler hängt auch von der Energie der beiden Bildmatrizen ab.

→ bei entsprechender Normierung ⇒ normierte Kreuzkorrelation (**normalized cross correlation, NCC**)

Methode der kleinsten Quadrate: (vgl. Abschnitt 8.2.3)

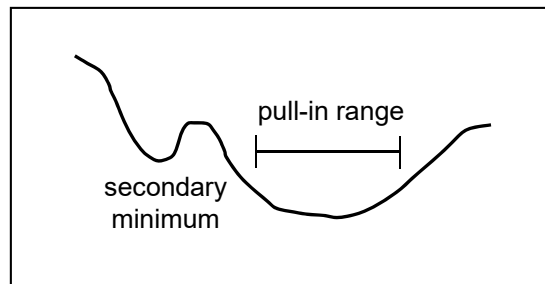


Illustration of the ill-posed nature of image matching. The optimization function is non-monotonic and the convergence radius (pull-in range) is rather small.

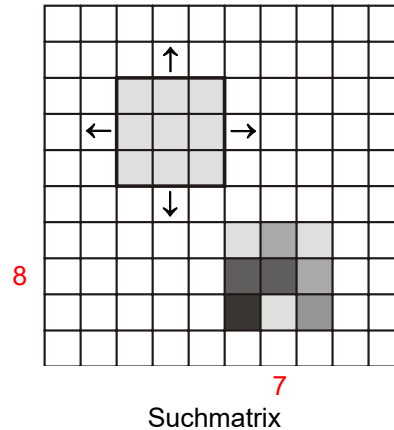
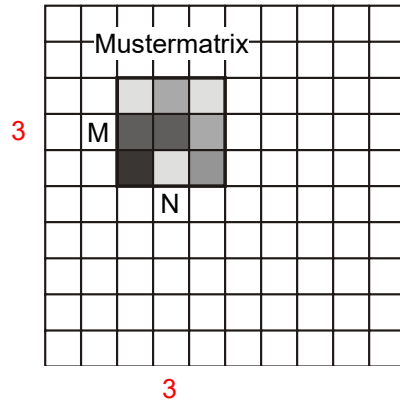
Area-based methods must begin the search process as close as a few pixels from the true conjugate location.

A.A. Goshtasby, 2012: Image Registration – Principles, Tools and Methods, Springer, 441 p.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.1 Normierte Kreuzkorrelation



Mustermatrix (*template window*) ... $f(x,y)$
 Suchmatrix (*search window*) ... $g(x,y)$

NCC ... Normalized Cross Correlation

$$\sigma_{fg} = \frac{\sum (f - \bar{f})(g - \bar{g})}{n}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\sum (f - \bar{f})^2}{n}}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum (g - \bar{g})^2}{n}}$$

$$\rho(x,y) = \frac{\sigma_{fg}}{\sigma_f \sigma_g} = \frac{\sum (f - \bar{f})(g - \bar{g})}{\sqrt{\sum (f - \bar{f})^2 \sum (g - \bar{g})^2}}$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

$$n = M \cdot N$$

- M×N ... Größe der Mustermatrix
- n ... Anzahl der Pixel in der Mustermatrix
- f ... Grauwerte der Mustermatrix
- g ... Grauwerte im korrespondierenden Ausschnitt der Suchmatrix
- \bar{f} ... mittlerer Grauwert der Mustermatrix
- \bar{g} ... mittlerer Grauwert im korrespondierenden Ausschnitt der Suchmatrix
- σ_{fg} ... Kovarianz der Grauwerte zwischen den beiden Bildern
- σ_f, σ_g ... Varianzen der Grauwerte der beiden Bilder
- ρ ... normierter Kreuzkorrelationskoeffizient

Die Mustermatrix aus M·N Bildelementen eines Bildes wird Pixel für Pixel über eine größere Suchmatrix eines anderen Bildes geschoben. In jeder Position wird der **Korrelationskoeffizient** ρ für alle gemeinsamen Bildelemente beider Matrizen gerechnet.

$\rho = 0 \Rightarrow$ keine Korrelation

$\rho \approx 1 \Rightarrow$ die zu vergleichenden Grauwertfunktionen sind sehr ähnlich

Für eine gültige Lösung (*image match*) sollte $\rho \geq t$ sein.

Die Wahl des Schwellwertes t hängt vom Bildrauschen und den vorhandenen geometrischen Verzerrungen ab.

Der Schwellwert t wird meist mit > 0.7 gewählt.

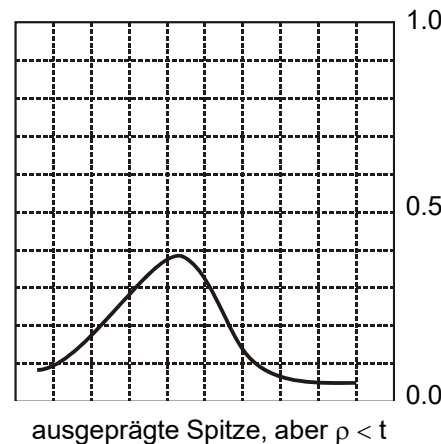
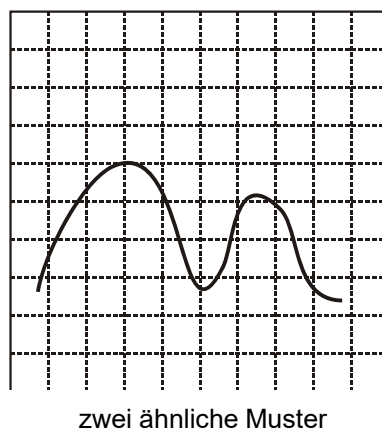
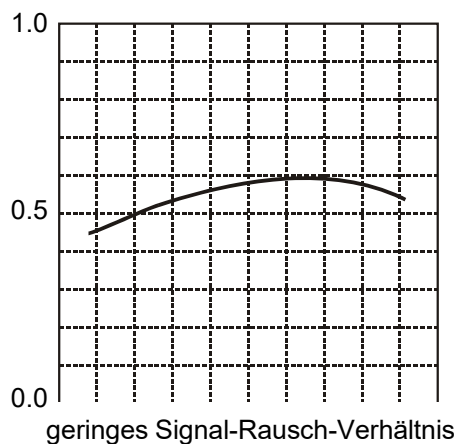


8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.1 Normierte Kreuzkorrelation

Bemerkungen:

- unterschiedliche Helligkeit und Bildkontrast werden kompensiert
- Rechenzeit steigt quadratisch mit der Größe der Mustermatrix bzw. Suchmatrix
- Rechenzeitbeschleunigung durch
 - optimale numerische Berechnung von ρ
 - 3×3 non-maximum suppression
 - dynamische Änderung der Größe der Mustermatrix (adaptive Anpassung)
 - Prädiktion des homologen Punktes aus zuvor berechneten Disparitäten
 - hierarchischer Ansatz
 - Verwendung von geometrischen Bedingungen (\rightarrow Kernstrahlgeometrie)



"flatness of peak"

- Einpassung im Subpixelbereich

a) (Fingierte) Vergrößerung der Auflösung durch Grauwertinterpolation:

$$M \cdot N \rightarrow 2M \cdot 2N, 4M \cdot 4N$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

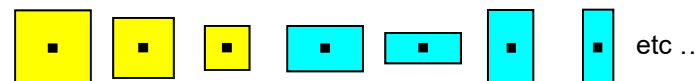
$$0.5, \qquad 0.25 \text{ - Pixelkoordinaten}$$

Selecting the support region

- Shiftable-window approach



- Adaptive-window approach





8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.1 Normierte Kreuzkorrelation



▪ Einpassung im Subpixelbereich (cont.)

b) Flächenhafte Interpolation der Korrelationswerte in der Umgebung des größten Korrelationswertes:

$$\rho(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{01}y^2 \quad \dots \text{kontinuierliche Korrelationsfunktion}$$

Berechnung der Koeffizienten a_{ij} durch Ausgleichsrechnung.

Die gesuchte Lösung ist dort gefunden, wo die interpolierte Fläche 2. Ordnung ihr Maximum hat (→ Extremwertberechnung).

c) Vereinfachung der Berechnung durch zwei getrennte eindimensional kontinuierliche Korrelationsfunktionen für die beiden Koordinatenrichtungen.

Quadratische Funktion: $\rho(x) = ax^2 + bx + c$ (Parabel)

$$\rho'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

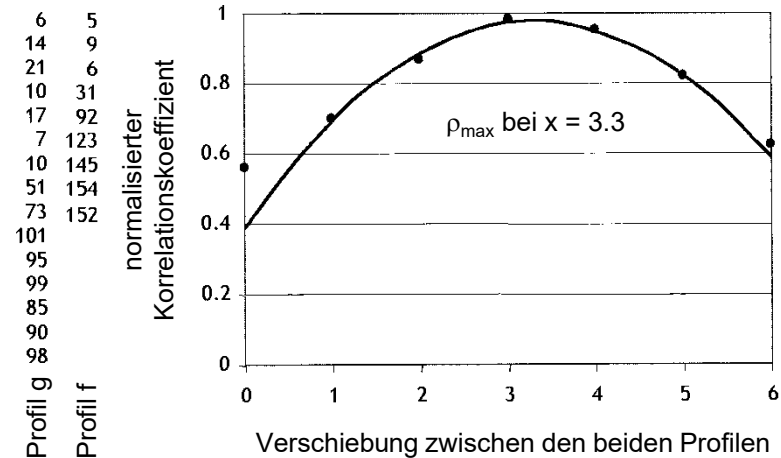
Zusammenfassung: Die (normierte) Kreuzkorrelation ist ein robustes, kontrastunabhängiges Verfahren mit hohem Rechenaufwand. Die Struktur des zu suchenden Musters ist praktisch beliebig. Allerdings können Maßstabsunterschiede, Rotationen und andere Verzerrungen zwischen Muster- und Suchmatrix nicht ohne weiters modelliert werden und führen direkt zu einem geringeren Ähnlichkeitsmaß. Die erreichbare **Bildmessgenauigkeit** liegt bei **0.1 Pixel**.

Vorteile:

- leicht zu implementieren
- kann als Hardwarelösung implementiert werden
- keine Näherungswerte notwendig

Nachteile:

- i. Allg. nur diskrete Positionen und keine Subpixel-Genauigkeiten
- nur Verschiebung zw. korrespondierenden Bildausschnitten erlaubt
- zu einfache geometrische Transformation für die Beschreibung einer Bild-zu-Bild-Zuordnung





8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.2 Nicht-parametrische Ähnlichkeitsmaße

Bei einem Vergleich zwischen Muster- und Suchmatrix können nicht nur die Grauwerte selbst verwendet werden, sondern auch die relative Anordnung der Grauwerte zueinander.

Das bedeutet, dass vor einem Vergleich zuerst eine sog. nicht-parametrische Transformation durchgeführt wird.

Als wichtigste nicht-parametrische Transformationen sind hier die **Rank-Transformation** und die **Census-Transformation** zu nennen.

Rank-Transformation

- (1) Vor der Berechnung des Ähnlichkeitsmaßes werden die Grauwerte z.B. absteigend sortiert.
- (2) Für jeden Bildpunkt wird in einem Fenster um diesen die Anzahl der Bildpunkte, deren Intensität kleiner als die Intensität des Bildpunktes selbst ist, berechnet und dem entsprechenden Bildpunkt zugewiesen. Wertebereich zw. 0 und N-1. Die beiden Rank-Transformierten werden dann mit einem der vorhin erwähnten Ähnlichkeitsmaße verglichen, wobei die Matrizengröße der Mustermatrix nicht mit der Größe des Messfensters in der Rank-Transformierten ident sein muss.

Weitere Algorithmen: Spearman's Rank Correlation, Ordinal Measures by Bhat & Nayar (1998)

10	30	75
20	50	85
45	60	95

→

1	3	7
2	5	8
4	6	9

Census-Transformation

Die Census-Transformation weist jedem Bildpunkt eine Bit-Kette zu, welche die Relationen der Intensitäten der Bildpunkte im Messfenster bezüglich des Aufpunktes beschreibt. Ist die Intensität kleiner als die Intensität des Aufpunktes, so wird die entsprechende Position in der Bit-Kette zu Eins gesetzt, ansonsten bleibt sie Null. Die Länge der Bit-Kette entspricht also der Anzahl der verglichenen Bildpunkte im Messfenster. Die Ähnlichkeit von zweier Bildpunkten muss nun über einen Vergleich von Bit-Ketten erfolgen. Die Anzahl der unterschiedlichen Bits wird als **Hamming-Distanz** bezeichnet. Die Ähnlichkeit von zwei Matrizen wird über die Summe von Hamming-Distanzen berechnet.

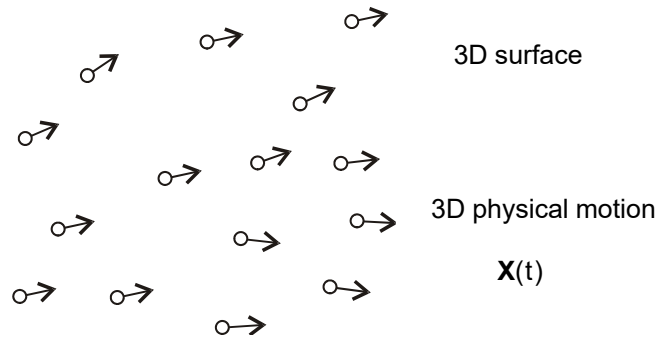
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>58</td><td>70</td><td>75</td></tr> <tr><td>80</td><td>78</td><td>73</td></tr> <tr><td>250</td><td>215</td><td>240</td></tr> </table>	58	70	75	80	78	73	250	215	240	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	1	1	1	0	1	1	0	0	0	$11\underline{1}000\underline{0}$	} Hamming-Distanz (d_H)= 2 $\sum_{M,N} d_H = \text{Minimum}$
58	70	75																			
80	78	73																			
250	215	240																			
1	1	1																			
0	1	1																			
0	0	0																			
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>60</td><td>70</td><td>80</td></tr> <tr><td>55</td><td>75</td><td>70</td></tr> <tr><td>255</td><td>205</td><td>230</td></tr> </table>	60	70	80	55	75	70	255	205	230	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td style="background-color: yellow;">1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	1	1	0	1	1	1	0	0	0	$11\underline{0}1000\underline{1}$	
60	70	80																			
55	75	70																			
255	205	230																			
1	1	0																			
1	1	1																			
0	0	0																			

(Quelle → Schreer, 2005. Stereobildanalyse und Bildsynthese.)

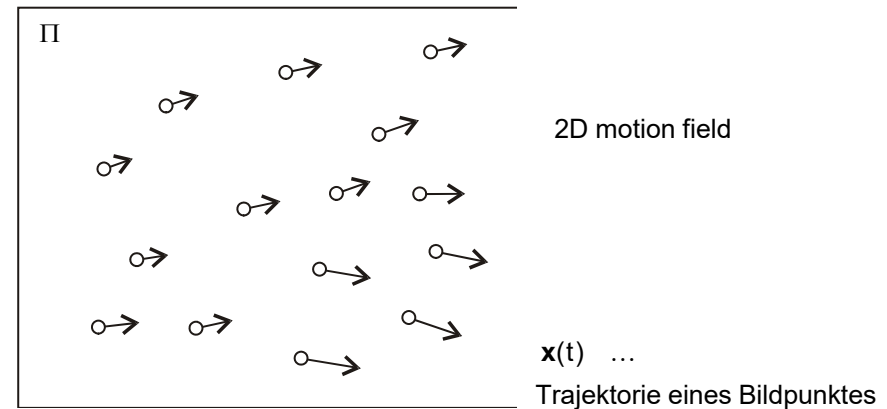


8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.3 Optical flow estimation



Kamera und Objekt bewegen sich relativ zueinander



Der **optische Fluss (optical flow)** spiegelt die Bildänderung zufolge Bewegung innerhalb eines (kurzen) Zeitintervalls dt wider. Das Vektorfeld des optischen Flusses (= Geschwindigkeitsfeld) repräsentiert die dreidimensionale Bewegung von Objektpunkten durch das zweidimensionale Bild.

Die Aufgabe von "optical flow estimation" ist die Schätzung des Bewegungsfeldes aus sich zeitlich ändernden Bildern (= Grauwertfunktionen).

Optical flow computation

Optical flow computation is based on two assumptions:

- (1) The observed brightness of any object point is constant over time.
- (2) Nearby points in the image plane move in a similar manner (the **velocity smoothness** constraint).

Suppose we have a continuous image; $f(x,y,t)$ refers to the grey-level of (x,y) at time t .

Representing a dynamic image as a function of position and time permits it to be expressed as a Taylor series:

$$f(x + dx, y + dy, t + dt) = f(x, y, t) + f_x dx + f_y dy + f_t dt + O(\partial^2) \quad (1)$$

where f_x, f_y, f_t denote the partial derivatives of f . We can assume that the immediate neighborhood of (x,y) is translated some small distance (dx,dy) during the interval dt ; that is, we can find dx, dy, dt such as that

$$f(x + dx, y + dy, t + dt) = f(x, y, t)$$



8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.3 Optical flow estimation

If dx , dy , dt are very small, the higher-order terms in equation (1) vanish and

$$-f_t = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} \quad \text{BCCE ... brightness change constraint equation; OFC ... optical flow constraint}$$

The goal is to compute the velocity

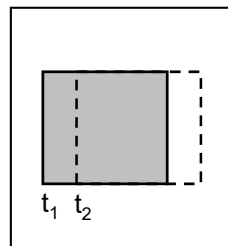
$$\mathbf{c} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (u, v)$$

f_x , f_y , f_t can be computed, or at least approximated, from $f(x,y,t)$. The motion velocity can then be estimated as

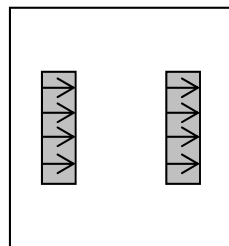
$$-f_t = f_x u + f_y v = \text{grad}(f) \mathbf{c} \quad (2)$$

where $\text{grad}(f)$ is a two-dimensional image gradient. It can be seen from equation (2) that the gray-level difference f_t at the some location of the image at times t and $t+dt$ is a product of spatial gray-level difference and velocity in this location according to the observer.

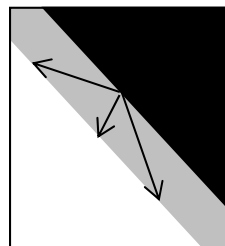
Equation (2) does not specify the velocity vector completely; rather it only provides the component in the direction of the brightest gradient (see Figure)



(a)



(b)



(c)

Problems of motion field construction:

- (a) object position at t_1 and t_2 ;
- (b) motion field;
- (c) aperture problem – ambiguous motion

To solve the problem completely, a smooth constraint is introduced; the velocity vector field changes slowly in a given neighborhood. Full details of this approach may be found in (Horn & Schumack, 1981), but the approach reduces to minimizing the squared error quantity.

$$E^2(x,y) = (f_x u + f_y v + f_t)^2 + \lambda(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)$$

where $u_x^2, u_y^2, v_x^2, v_y^2$ denote partial derivatives squared as error terms. The first term represents a solution to equation (2), the second term is a smoothness criterion, and λ is a Lagrange multiplier. Using standard techniques, this reduces to solve the differential equations (see next page).



8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.3 Optical flow estimation

$$(\lambda^2 + f_x^2)u + f_x f_y v = \lambda^2 \bar{u} - f_x f_t$$

$$f_x f_y u + (\lambda^2 + f_y^2)v = \lambda^2 \bar{v} - f_y f_t$$

where \bar{u}, \bar{v} are mean values of the velocity in directions x and y in some neighborhood of (x, y) .

It can be shown that a solution to these equations is

$$u = \bar{u} - f_x \frac{P}{D}$$

$$v = \bar{v} - f_y \frac{P}{D}$$

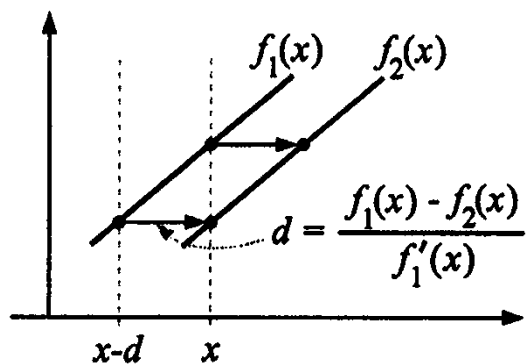
where $P = f_x \bar{u} + f_y \bar{v}$, $D = \lambda^2 + f_x^2 + f_y^2$.

Determination of the optical flow is then based on a Gauss-Seidel iteration using pairs of (consecutive) dynamic images.

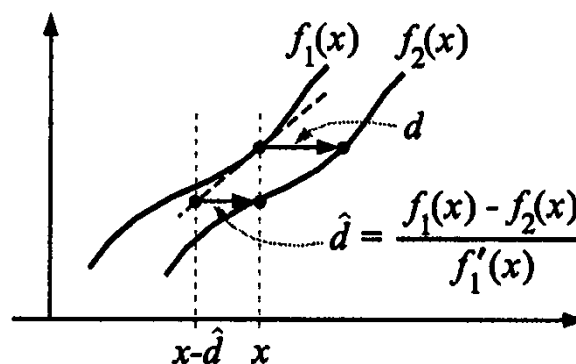
→ Relaxation computation of optical flow from dynamic image pairs. Many optical flow computation approaches!

Compare: Sonka, Hlavac, Boyle, 1999. Image processing, Analysis, and Machine Vision.

Paragios, Chen, Faugeras, 2006. Handbook of Mathematical Models in Computer Vision, chapter 15.



linear signal



nonlinear signal

d, \hat{d} ... displacement of the signal
 $f_1(x) - f_2(x)$... temporal difference of the signal

$f_1'(x)$... spatial derivative (slope)



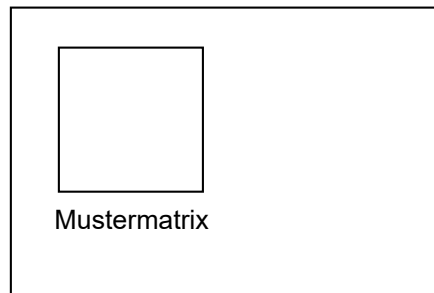
8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung

Prinzip (Quelle: Th. Luhmann, 2003):

Das Verfahren der Bildzuordnung nach kleinsten Quadraten (*least squares matching, LSM*) basiert auf einer iterativen geometrischen und radiometrischen Transformation zwischen Mustermatrix und Suchmatrix mit dem Ziel, die Quadratsumme der Grauwertdifferenzen zwischen Musterbild und transformiertem Suchbild zu minimieren.

→ Förstner 1982, Ackermann 1983, Grün 1985



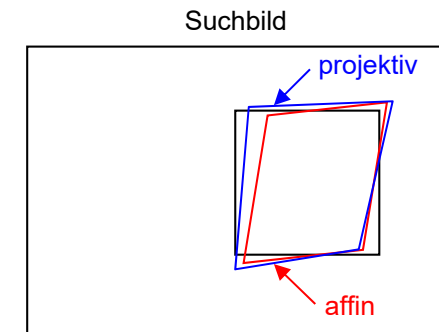
$f(x,y)$

$$f = h_2 \cdot g + h_1$$

$$f(x,y) = h_2 \cdot g(x',y') + h_1$$

$$\sum (f(x,y) - h_2 \cdot g(x',y') - h_1)^2 = \text{Minimum}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & a_5 \\ a_6 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x}$$



$g(x',y')$

Das Musterbild kann ein Ausschnitt aus einem realen Bild sein, dem ein korrespondierender Bereich im zugehörigen Bild (z.B. Stereopartner) angepasst wird. Bei bekannter Grauwertstruktur kann das Musterbild auch synthetisch erzeugt werden und als sogenanntes Template für alle entsprechenden Punkte im Suchbild verwendet werden (*least squares template matching*).

Zur geometrischen Anpassung geht man von der Annahme aus, dass beide Bildausschnitte einem ebenen Objekt entsprechen. Dann kann die Abbildung zwischen zwei zentralperspektiven Bildern durch die Projektivtransformation beschrieben werden. Für genügend kleine Bildfenster kann die Projektivtransformation durch eine **Affintransformation** ersetzt werden. Die verbleibenden sechs Transformationsparameter werden im Rahmen der Kleinsten-Quadrate-Ausgleichung geschätzt, in der die Grauwerte der beiden Bildausschnitte als Beobachtungen eingehen. Die radiometrische Anpassung erfolgt durch lineare Grauwerttransformation mit zwei Parametern (für **Helligkeit** und **Kontrast**).

Anmerkungen:

- Eine optimale Anpassung wird ermittelt, wenn das mathematische Modell die optische Abbildung hinreichend beschreibt.
- Das mathematische Modell lässt sich erweitern, wenn besondere Zusatzinformationen oder Randbedingungen vorliegen, z.B. in Form von geometrischen Bedingungen zwischen Bildern oder am Objekt.
 - **(multi-image) geometrically constrained matching** (Baltsavias, 1991)
orientiertes Stereobildpaar: Schnittbedingung (→ Kernstrahlgeometrie)
 - **object-space matching**



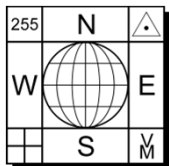
8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung

Anmerkungen (cont.):

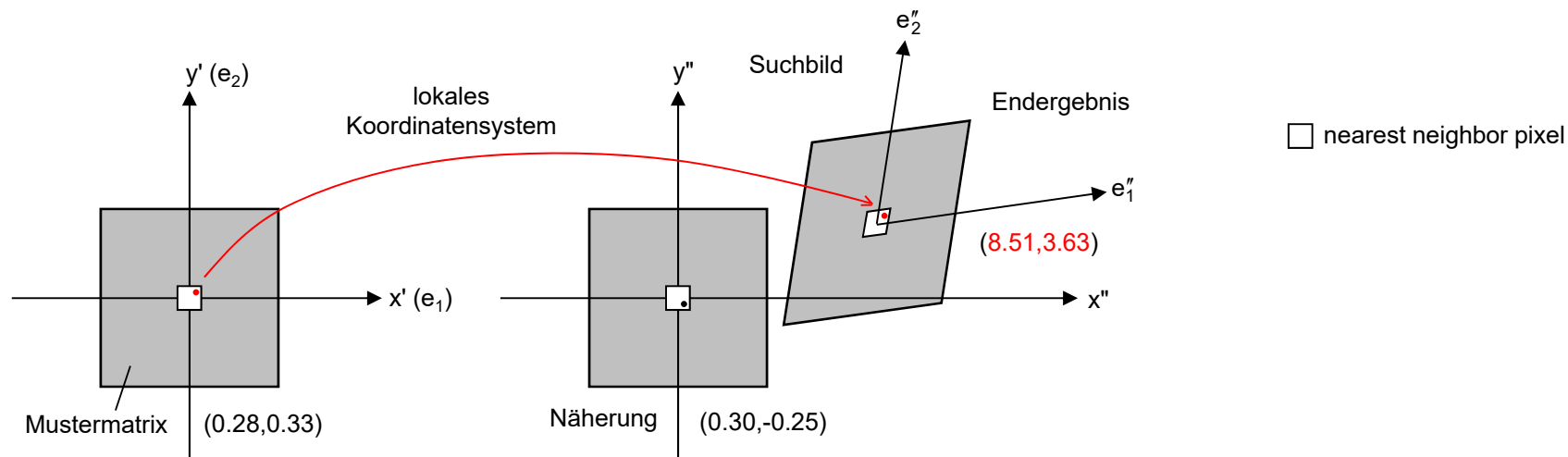
- Die Beobachtungsgleichungen sind nicht-linear und müssen daher an gegebenen Näherungswerten ($\approx 1-2$ Pixel genau) linearisiert werden.
- Das Ausgleichssystem ist in der Regel hochredundant, da für die acht zu bestimmenden Parameter alle Grauwerte eines Bildausschnittes als Beobachtungen vorliegen.
- Aus der Kovarianzmatrix lassen sich Genauigkeitsmaße für die ermittelten Unbekannten schätzen. Es liegen somit interne Qualitätskriterien vor, die für statistische Ausreißertests, Ergebnisanalyse und Weiterverarbeitung genutzt werden können.
- Die Verbesserungsgleichungen können noch mit unterschiedlichen Gewichten belegt werden, z.B. distanzabhängig vom Zentrumspixel oder auch regionenabhängig (vgl. robuste Schätzung).
- Alternierende Berechnung der geometrischen und radiometrischen Parameter \rightarrow führt eventuell zu einer stabileren Lösung bei starker Korrelation der Unbekannten.
- Signifikanz-Test der Unbekannten \rightarrow Reduktion der Anzahl der Parameter
- $\hat{\sigma}_0$ spiegelt sowohl den Rauschanteil in beiden Bildern als auch die Güte des gewählten mathematischen Modells wider.
- Bei optimalen Verhältnissen sind Einpassgenauigkeiten von 0.01-0.05 Pixel möglich.
(Achtung: Gute Genauigkeitswerte sind jedoch kein Garant für eine richtige Lösung des image matching!)
- **adaptive least squares matching**
- Die Rolle von Muster- und Suchmatrix kann gegebenenfalls vertauscht werden.
- Der homologe Punkt zum vorgegebenen Bildpunkt der Mustermatrix wird durch Einsetzen der Koordinaten in **T** ermittelt.

E. Baltsavias, 1991: Multiphoto geometrically constrained matching. Dissertation, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Mitteilungen der ETH Zürich (49).



8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung



$$g'(x', y') + v = \bar{g} = T_r[g''(T_g[x', y'; a_m]); h_k] \quad \dots \text{Verbesserungsgleichung}$$

$T_r(g; h_k)$... radiometrische Transformation

$$\bar{g}'' = h_2 g'' + h_1$$

$T_g(g; a_m)$... geometrische Transformation

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & a_5 \\ a_6 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mathbf{e}'_1 x' + \mathbf{e}'_2 y'$$

Die Suchmatrix g'' wird geometrisch und radiometrisch so verzerrt, dass die transformierte Suchmatrix \bar{g}'' (im Sinne minimaler Verbesserungen) bestmöglich mit der Mustermatrix übereinstimmt.

Für die vermittelnde Ausgleichung muss das funktionale Modell linearisiert werden, wobei die Näherungswerte a_m^0 und h_k^0 vorgegeben werden müssen.

$$g'(x', y') - \bar{g}''(a_m^0; h_k^0) + v = \frac{\partial \bar{g}''}{\partial a_m} da_m + \frac{\partial \bar{g}''}{\partial h_k} dh_k$$

$$\text{Startwerte: } a_1^0 = a_2^0 = a_5^0 = a_6^0 = h_1^0 = 0$$

$$a_3^0 = a_4^0 = h_2^0 = 1$$



8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial \bar{g}''}{\partial a_1} = h_2^0 \frac{\partial \bar{g}''}{\partial x''} ; \quad \frac{\partial \bar{g}''}{\partial a_2} = h_2^0 \frac{\partial \bar{g}''}{\partial y''} ; \quad \frac{\partial \bar{g}''}{\partial a_3} = h_2^0 \frac{\partial \bar{g}''}{\partial x''} x' ; \quad \frac{\partial \bar{g}''}{\partial a_4} = h_2^0 \frac{\partial \bar{g}''}{\partial y''} y'$$

$$\frac{\partial \bar{g}''}{\partial a_5} = h_2^0 \frac{\partial \bar{g}''}{\partial x''} y' ; \quad \frac{\partial \bar{g}''}{\partial a_6} = h_2^0 \frac{\partial \bar{g}''}{\partial y''} x' ; \quad \frac{\partial \bar{g}''}{\partial h_2} = g''(x'', y'') ; \quad \frac{\partial \bar{g}''}{\partial h_1} = 1$$

$$\frac{\partial \bar{g}''}{\partial x''} = \frac{\partial \bar{g}''}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x''} + \frac{\partial \bar{g}''}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x''} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{g}''}{\partial y''} = \frac{\partial \bar{g}''}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y''} + \frac{\partial \bar{g}''}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y''}$$

Die dafür benötigten partiellen Ableitungen $\frac{\partial x'}{\partial x''}, \frac{\partial y'}{\partial x''}, \frac{\partial x'}{\partial y''}$ und $\frac{\partial y'}{\partial y''}$

entsprechen den Parametern a'_3 bis a'_6 der Umkehrfunktion $T'_g(g; a'_m)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_3 & a'_5 \\ a'_6 & a'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \text{Startwerte:} \quad a_1^0 = a_2^0 = a_5^0 = a_6^0 = 0 \\ a_3^0 = a_4^0 = 1$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{Ax}$$

$$\mathbf{I} = (\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_n)^T \quad n = 1, \dots, M \cdot N \\ \Delta g = g' - \bar{g}'' \quad (\text{Grauwertdifferenzen})$$

A ... Designmatrix mit partiellen Ableitungen

$$\mathbf{x} = (da_1, da_2, da_3, da_4, da_5, da_6; dh_1, dh_2)^T \quad \dots \text{Zuschläge zu den Unbekannten}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{I}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Pv}}{n-8}} \quad \dots \text{Gewichtseinheitsfehler}$$

$$\sigma_{x_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}} \quad \dots \text{Standardabweichung der berechneten Unbekannten}$$

4 Faktoren beeinflussen die Genauigkeit der Kleinste-Quadrate-Anpassung:

- (1) Bildrauschen, (2) Bildkontrast, (3) Größe der Mustermatrix und (4) Richtigkeit des math. Modells

- (1) → Berechnung der Gradienten in der $\frac{\partial \bar{g}''}{\partial x'}, \frac{\partial \bar{g}''}{\partial y'}$ in der vorentzerten Suchmatrix und Berücksichtigung der affinen Verzerrungen oder
- (2) → Berechnung von $\frac{\partial \bar{g}''}{\partial x''}, \frac{\partial \bar{g}''}{\partial y''}$ durch (meist bilineare) Interpolation in der Suchmatrix.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.2.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung

Spezialfall: $h_2 = 1, h_1 = 0$... keine Helligkeits- und Kontrastanpassung
 $a_3 = a_4 = 1, a_5 = a_6 = 0$... nur Translation zugelassen

$$g'(x', y') - \bar{g}''(x''^0, y''^0) + v = (g''_x)^0 a_1 + (g''_y)^0 a_2$$

$$\Delta g + v = g''_x a_1 + g''_y a_2$$

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} = \mathbf{N} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sum (g''_x)^2 & \sum g''_x g''_y \\ \sum g''_x g''_y & \sum (g''_y)^2 \end{pmatrix}$$

Die auftretenden Summen laufen über alle Pixel im Korrelationsfenster.
 \mathbf{N} ist die Grundlage für zahlreiche Interest-Operatoren!

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum \Delta g^2}{M \cdot N - 2}}$$

$$\hat{\sigma}_0 \mathbf{Q}_{xx} = \hat{\sigma}_0 \mathbf{N}^{-1}$$

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{q_{a_1 a_1}} \hat{\sigma}_0, \quad \sigma_{a_2} = \sqrt{q_{a_2 a_2}} \hat{\sigma}_0$$

Für das Erkennen von unveränderten Mustern (templates) ist es sinnvoll, die Rolle von Muster- und Suchmatrix zu vertauschen.
 Hierbei ergibt sich – unabhängig von den einzelnen Positionierungen im digitalen Bild – immer dieselbe invertierte Normalgleichungsmatrix \mathbf{N}^{-1} ; man muss sie deshalb nur einmal berechnen.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3 Merkmalsbasierte Bildzuordnung 8.3.1 Einleitung

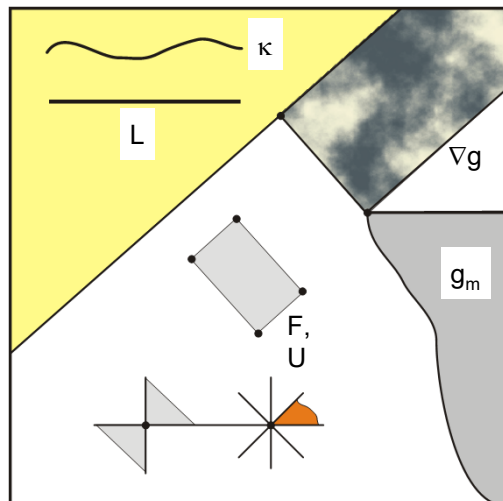


Quellenangabe: Digital Photogrammetric System (Tutorial, Munich, 1991), Ch. Heipke (1995), T. Schenk (1999), Th. Luhmann (2003), K. Kraus (2004), Manual of Photogrammetry (2004)

Die automatische Extraktion sogenannter **Merkmale** stellt einen wesentlichen Schritt bei der photogrammetrischen Verarbeitung digitaler Bilder dar. Im Sinne von Marr (vgl. Abschnitt 8.1) ist die Merkmalsextraktion einer der Prozesse für den Übergang vom ursprünglichen Bild zur primären Beschreibung. Sie dient dazu, die in den Bildern implizit vorhandene Information in eine andere, leichter zugängliche Repräsentation zu transformieren.

Merkmale können sowohl markante **Punkte**, als auch **Kanten**, **Linien** und **Flächen** sein.

Markante Punkte sind entweder Ecken oder isolierte helle (dunkle) Punkte auf dunklem (hellen) Hintergrund. Kanten treten dort auf, wo zwei Gebiete unterschiedlicher aber in sich homogener Textur aneinanderstoßen. Linien sind helle (dunkle) lineare Strukturen begrenzter Breite auf dunklem (hellen) Hintergrund. Linien bestehen aus zwei parallelen Kanten, und die Extraktion von Linien kann auf die von Kanten zurückgeführt werden. Flächen sind Gebiete homogener Helligkeit oder Textur. Aufgrund dieser Definition ergibt sich, dass die Extraktion von Kanten und Flächen zueinander komplementär ist: entweder extrahiert man Kanten und fasst die homogenen Gebiete dazwischen jeweils als Fläche auf, oder man extrahiert Flächen, deren Begrenzung dann die Kanten darstellen. Diese beiden Möglichkeiten stellen die grundsätzlichen Vorgangsweisen bei der Bildsegmentierung dar. Auf ähnliche Weise lassen sich auch Punkte als Orte extrahieren, in denen sich Kanten schneiden, bzw. in denen sich drei oder mehr Flächen schneiden.



Punkte (0D), Kanten (1D), Linien (1D), Flächen (2D) + Attribute



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3 Merkmalsbasierte Bildzuordnung 8.3.1 Einleitung



Die Extraktion der Merkmale bedeutet sowohl deren **Auffinden** als auch deren **genaue Lokalisation**. Meistens wird darüber hinaus gefordert, dass ein Verfahren zur Merkmalsextraktion allgemein einsetzbar ist, also ohne problemspezifisches Wissen auskommt. Neben der genauen Lage der Merkmale werden dabei auch die das Merkmal **beschreibende Attribute** extrahiert. Für Punkte können das z.B. der minimale und der maximale Grauwertgradient in unterschiedlichen Richtungen, für Kanten deren Länge oder Krümmung und für Flächen die Größen, die Form, der mittlere Grauwert oder die Varianz der Grauwerte innerhalb der Fläche sein. In der Regel werden diese Attribute für lokale Bereiche bestimmt. Danach wird aufgrund von vorgegebenen oder automatisch bestimmten Schwellwerten entschieden, ob es sich um Merkmale handelt oder nicht.

Für die Auswahl der Merkmale und der Attribute gibt es eine Reihe von Kriterien:

- **Deutlichkeit** (lokale Einzigartigkeit, Unterscheidbarkeit vom Hintergrund) (*distinctness*)
- **Invarianz gegenüber geometrischen und radiometrischen Verzerrungen** (*invariance*)
- **Robustheit** (Unempfindlichkeit gegen Rauschen) (*stability*)
- **Seltenheit** (globale Einzigartigkeit, Unterscheidbarkeit zu anderen Kandidaten) (*seldomness*)
- **Interpretierbarkeit** (Merkmale sollen sich für die Verwendung auf der symbolischen Ebene der Bildanalyse eignen) (*interpretability*)

Je nach geplanter Weiterverarbeitung müssen die entsprechenden Merkmale und Attribute sowie die wesentlichen Kriterien ausgewählt werden. Die geforderte geometrische und radiometrische Invarianz ist für Punkte am ehesten erfüllt. Dagegen ist die Interpretierbarkeit von Punkten eher gering. Deswegen eignen sich Punkte für Aufgaben innerhalb der Bildzuordnung. Kanten und Flächen werden dagegen eher zur Objekterkennung verwendet.

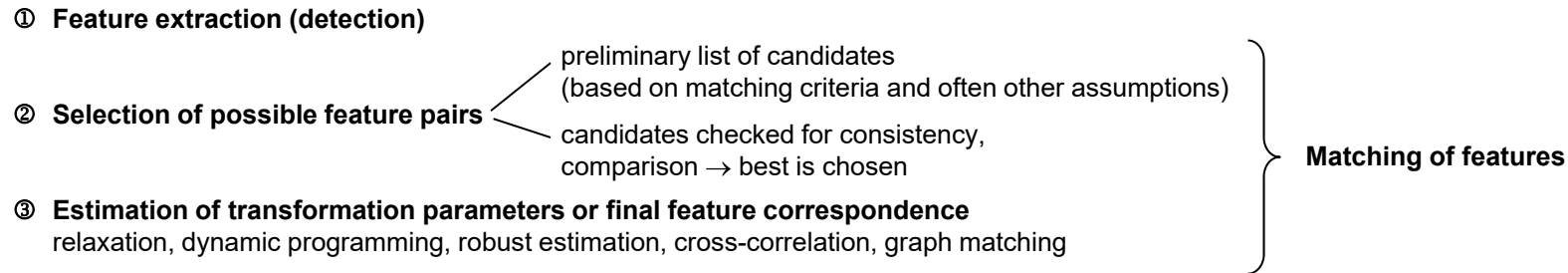


8. Bildzuordnungsverfahren

8.3 Merkmalsbasierte Bildzuordnung 8.3.1 Einleitung



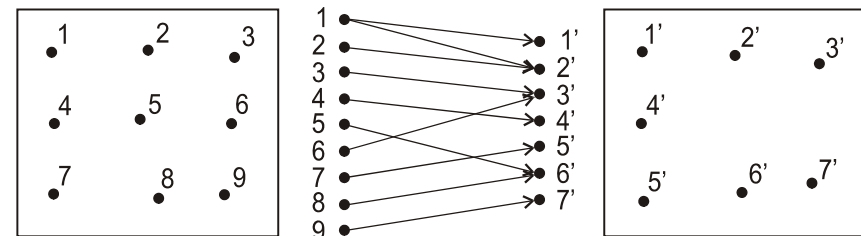
Feature-based Matching (overview)



Area-based matching methods can be quite sensitive to changes in illumination and perspective between different images. Although these difference can be modeled to some extent, they still may lead to matching failures. Matching images at feature level instead of the gray level is often more robust. Feature-based methods generally consist of three steps:

(1) **Feature extraction:** Features used for matching should have distinct attributes such that they can be easily identified in multiple images. Most feature-based matching algorithms work with either distinct points as extracted by an interest operator or gray value edges. These features are independently extracted from all the images to be matched.

(2) **Selection of possible feature pairs:** In the second step the attributes of the extracted features are compared, feature pairs are classified as possible conjugate features if their attributes are similar. For extracted gray level edges one could, for instance, check whether two edges have the same contrast sign and about the same orientation (assuming that the rotation between the images is approximately known). The list of feature pairs resulting from this step may be ambiguous, since a feature in one image may be similar to multiple features in the other image. A feature may therefore be part of multiple feature pairs that are considered as possibly conjugate.



Feature pairs: (1,1') (1,2') (2,2') (3,3') (4,4') (5,6') (6,3') (7,5') (8,6') (9,7')

(3) **Estimation of transformation parameters or final feature correspondence:** The last step selects the truly corresponding features from the initial list of feature pairs. Simultaneously, the parameters of the geometric transformation between the two images may be estimated. By forcing a consistent geometric transformation for all feature pairs within a window, the ambiguity in the initial feature pair list can be solved.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.2 Interest-Operatoren 8.3.2.2 Dreschler-Operator

Dieser Operator gehört in die Gruppe derjenigen Verfahren, in denen ein flächenhaftes analytisches Modell für die Grauwertfunktion aufgestellt wird. In dieser Fläche wird anschließend die optimale Punktlage bestimmt. Dazu wird die Krümmung der Fläche mit Hilfe der Differentialgeometrie analysiert. Für ein Pixel des im vorigen Abschnitt definierten Fensters mit den Grauwerten $g(r,c)$ ergeben sich die ersten und zweiten Ableitungen in Zeilen- und Spaltenrichtung zu (der Einfachheit halber sind die Gleichungen hier für $R=C=3$ angeschrieben):

$$g_r = \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{2}[g(r+1,c) - g(r-1,c)]$$

$$g_c = \frac{\partial g}{\partial c} = \frac{1}{2}[g(r,c+1) - g(r,c-1)]$$

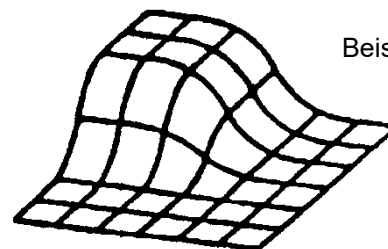
$$g_{rr} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = g(r+1,c) + g(r-1,c) - 2g(r,c)$$

$$g_{cc} = \frac{\partial^2 g}{\partial c^2} = g(r,c+1) + g(r,c-1) - 2g(r,c)$$

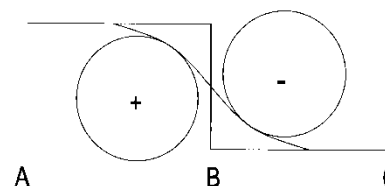
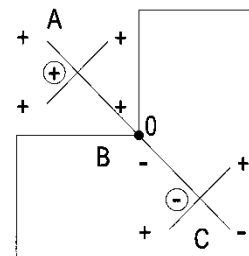
$$g_{rc} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial c} = \frac{1}{4}[g(r+1,c+1) + g(r-1,c-1) - g(r-1,c+1) - g(r+1,c-1)]$$

$$\Rightarrow \kappa_g = \frac{g_{rr}g_{cc} - g_{rc}^2}{1 + g_r^2 + g_c^2} \quad \dots \text{ Gauß'sche Krümmung}$$

κ_g ist auch das Produkt der beiden senkrecht zueinander verlaufenden Hauptkrümmungen κ_{\min} und κ_{\max} der Fläche: $\kappa_g = \kappa_{\min} \cdot \kappa_{\max}$



Beispiel: helle Ecke auf dunklem Hintergrund



- 0 + Vorzeichen der Hauptkrümmungen
 - + Extrema der Gauß'schen Krümmung

Dreschler verwendet für ihren Operator das Modell einer rechtwinkligen Ecke. (Anmerkung: Der **Deriche corner and vertex detector** ist eine Erweiterung des Dreschler-Operators auf allgemeine/spitze Ecken.) Dabei kann es sich um eine helle Ecke auf dunklem Hintergrund (vgl. Beispiel) oder um eine dunkle Ecke auf hellem Hintergrund handeln. In der Nähe der Ecke liegen sich zwei Punkte minimaler und maximaler Gauß'scher Krümmung gegenüber. Der gesuchte markante Punkt ist der Wendepunkt in der Verbindung zwischen Minimum and Maximum. Dort ist eine der Hauptkrümmungen und damit auch die Gauß'sche Krümmung Null.

Wird nun für alle Pixel die Gauß'sche Krümmung berechnet, und werden die Minima und Maxima paarweise gruppiert, so können markante Punkte jeweils als Nulldurchgang der Verbindungslinie zwischen den zugehörigen Minima und Maxima der Gauß'schen Krümmung bestimmt werden. Ein Interest-Operatorwert selbst wird mit dem Dreschler-Operator nicht angegeben.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.2 Interest-Operatoren 8.3.2.3 Förstner-Operator

Quelle: Manual of Photogrammetry (2004), Ch. Heipke, 1995: Digitale photogrammetrische Arbeitsstationen.

Der Förstner-Operator (Förstner & Gülch, 1987): basiert auf dem Modell, dass die Grauwertumgebung eines Punktes $f(r,c)$ eine verschobene, mit Rauschen versehene Abbildung des ursprünglichen Bildsignals $g(r,c)$ ist (vgl. dazu Abschnitt 8.2.3 – Optical flow estimation). Dann gilt für den Zusammenhang zwischen f und g :

$$f(r,c) = g(r+r_0, c+c_0) + n(r,c) \quad (1)$$

Linearisiert man (1) an den Näherungswerten $r_0=0$ und $c_0=0$, erhält man mit

$$dg(r,c) = f(r,c) - g(r,c)$$

$$dg(r,c) - n(r,c) = \frac{\partial g}{\partial r} r_0 + \frac{\partial g}{\partial c} c_0 = g_r r_0 + g_c c_0$$

Fasst man die Bestimmung von r_0 und c_0 als Ausgleichsproblem mit den unkorrelierten und gleichgenauen Beobachtungen $dg(r,c)$ und den Unbekannten $\mathbf{x}^T = (r_0, c_0)$ auf, so ergeben sich die Normalgleichungen mit der Designmatrix \mathbf{N} zu

$$\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T dg \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} \sum g_r^2 & \sum g_r g_c \\ \sum g_r g_c & \sum g_c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum g_r dg \\ \sum g_c dg \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$$

Aus $\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1}$ lassen sich Aussagen über die Genauigkeit des Punktes $P(r+r_0, c+c_0)$ gewinnen.

Berechnung der Fehlerellipse → Eigenwerte λ_1 und λ_2 , Eigenvektoren

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22} + k)} \rightarrow a = \frac{1}{\lambda_2} \quad \dots \text{ große Halbachse}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22} - k)} \rightarrow b = \frac{1}{\lambda_1} \quad \dots \text{ kleine Halbachse}$$

$$k = \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2Q_{12}}{Q_{11} - Q_{22}} \rightarrow \frac{1}{2} \arctan \frac{2Q_{12}}{Q_{11} - Q_{22}} \quad \dots \text{ Richtung der großen Halbachse}$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$



Verleihung des Ehrendoktorates an Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Förstner (re. im Bild), TU Graz, 13. Mai 2011

Förstner fordert, dass die Punktlagefehlerellipse von P möglichst **rund** sein soll, um markante Punkte an langgestreckten Kanten auszuschließen. Außerdem soll die Ellipse möglichst **klein** sein, um eine gute Lokalisierung von P zu ermöglichen.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.2 Interest-Operatoren 8.3.2.3 Förstner-Operator



Maß für die Rundheit der Ellipse:

$$q = 1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2 = 4 \frac{\det \mathbf{N}}{(\text{sp} \mathbf{N})^2} = 4 \frac{N_{11}N_{22} - N_{12}^2}{(N_{11} + N_{22})^2} \quad 0 \leq q \leq 1$$

Maß für die Größe der Ellipse:

$$w = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\det \mathbf{N}}{\text{sp} \mathbf{N}} = \frac{N_{11}N_{22} - N_{12}^2}{N_{11} + N_{22}} \quad w > 0$$

Diese Formulierungen von Q und w haben den Vorteil, dass zu ihrer Bestimmung lediglich die Elemente der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} , nicht aber die Inverse \mathbf{Q} oder die Eigenwerte von \mathbf{N} oder \mathbf{Q} berechnet werden müssen. Zur Bestimmung markanter Punkte werden q und w für jedes Pixel aus den Grauwerten des betrachteten Fensters (5×5 , 7×7) berechnet. Übersteigen q und w bestimmte Schwellwerte (z.B. $q_{\min} = 0.8$, $w_{\min} = 10\text{-}20\%$ der größten w -Werte), so wird der Punkt als markant angesehen. Für die Detektion des Punktes mit Subpixel-Genauigkeit muss r_0 und c_0 berechnet werden \rightarrow automatische Bestimmung der Art des markierten Punktes durch statistische Tests \rightarrow Wahl der entsprechenden Rechenformel für $\mathbf{A}^T \mathbf{I}$ ($f(r,c)$ kommt nicht vor!) \rightarrow vgl. Förstner (1986). Für diesen Punkt gilt w als Interest-Operatorwert. Sind die Genauigkeitsanforderungen nicht so hoch, kann w als Interest-Operatorwert für den Mittelpunkt des betrachteten Fensters verwendet werden. Die Berechnung von r_0 und c_0 (Subpixel-Genauigkeit) ist relativ kompliziert und rechenaufwendig.

Um die Auswirkung des Bildrauschens zu minimieren, kann gegebenenfalls eine Tiefpass-Filterung durchgeführt werden:

$$G_\sigma(r,c) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2+c^2}{2\sigma^2}} \quad \text{zweidimensionale Normalverteilung (Gauß-Filter)}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} g_r \\ g_c \end{pmatrix} \quad d^2 = r^2 + c^2$$

$$g_r = f * G_r \quad \text{und} \quad g_c = f * G_c \quad d = \sqrt{2}\sigma \quad \dots \quad \text{Abszisse des Wendepunktes in der 2D Gauß'schen Glockenkurve}$$

$$G_r(r,c) = \frac{\partial G_\sigma(r,c)}{\partial r} = -\frac{r}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{r^2+c^2}{2\sigma^2}} \quad * \dots \text{ Faltungsoperator}$$

$$G_c(r,c) = \frac{\partial G_\sigma(r,c)}{\partial c} = -\frac{c}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{r^2+c^2}{2\sigma^2}} \quad r \dots \text{ Zeilenindex}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad c \dots \text{ Spaltenindex}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \sigma \dots \text{ Standardabweichung (meist zw. 0.5 und 3.0)}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{Filterradius der Filtermaske} \approx d = \sqrt{2}\pi\sigma$$

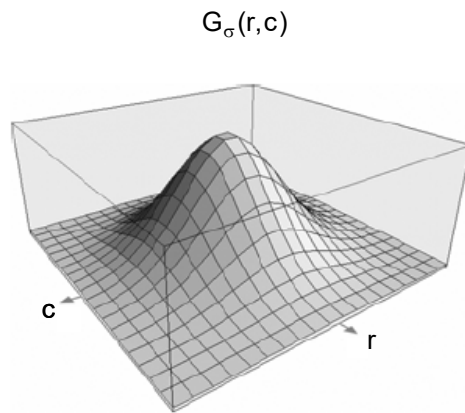


8. Bildzuordnungsverfahren

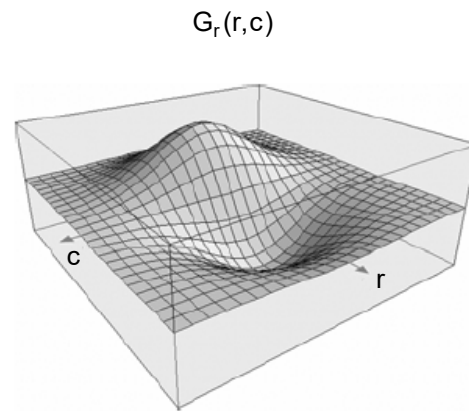
8.3.2 Interest-Operatoren 8.3.2.3 Förstner-Operator



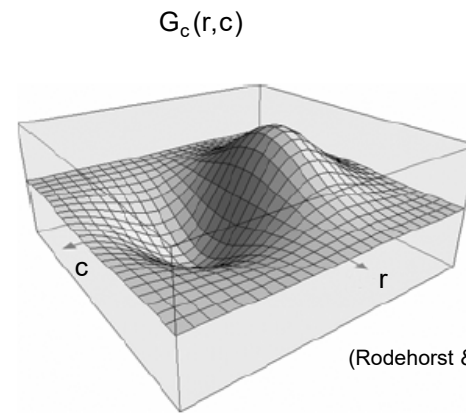
$$\Rightarrow \mathbf{N}_\sigma = \begin{pmatrix} \sum g_{r,\sigma}^2 & \sum g_{r,\sigma} g_{c,\sigma} \\ \sum g_{r,\sigma} g_{c,\sigma} & \sum g_{c,\sigma}^2 \end{pmatrix}$$



Gauß'sche Filtermatrix mit $\sigma = \sqrt{2}$



erste Ableitungen nach r und c

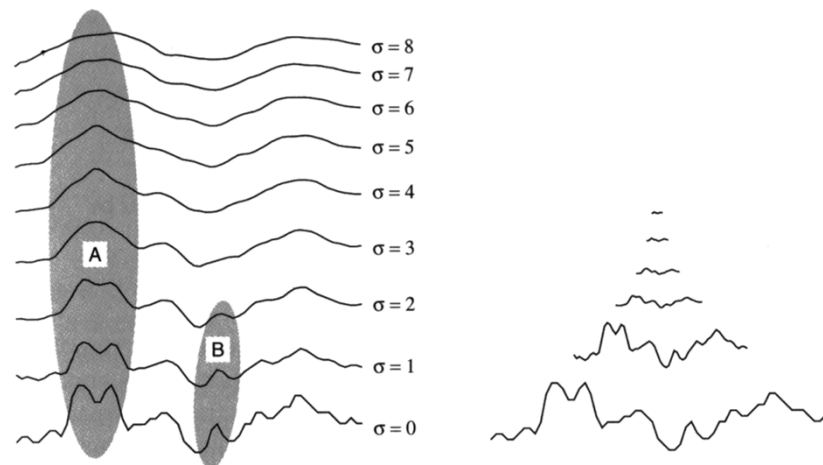


(Rodehorst & Koschan, 2006)

Scale-Space Generation:

Multi-scale representation of a 1-D signal

Gaussian smoothing filter of increasing σ



(Schenk, 1999: Digital photogrammetry)



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.2 Interest-Operatoren 8.3.2.4 Harris-Operator

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sum g_r^2 & \sum g_r g_c \\ \sum g_r g_c & \sum g_c^2 \end{pmatrix}$$

Grundlage der Berechnung des Harris-Operators ist die Matrix \mathbf{N} wie beim Föstner-Operator.

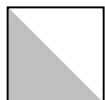
$$\begin{aligned} h &= \det \mathbf{N} - k \cdot (\text{sp} \mathbf{N})^2 & k \in \mathbb{R} & \quad \dots \text{ "cornerness"} \\ &= N_{11}N_{22} - N_{12}^2 - k \cdot (N_{11} + N_{22})^2 \\ &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 - k \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 = \sigma_1 \sigma_2 - k \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)^2 = (1+k)\sigma_1 \sigma_2 + k \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \end{aligned}$$

λ_i ... Eigenwerte
 σ_i ... Singulärwerte
 $\lambda_i = \sqrt{\sigma_i}$

$\text{rg} \mathbf{N} = 2 \Rightarrow$ gültige Lösung



$\text{rg} \mathbf{N} = 1 \Rightarrow$ eine ausgezeichnete Kantenrichtung



$\text{rg} \mathbf{N} = 0 \Rightarrow$ homogene Region



Mit dem empirisch ermittelten Wert von 0.04 lassen sich markante Punkte von Punkten ausgeprägter Kanten trennen.
 \rightarrow Punkte: $h > 0$; Punkte auf Kanten: $h < 0$.

Der Interest-Operatorwert h kann im Vergleich zum Föstner-Operator schwer interpretiert werden.
 Die eigentliche Bestimmung eines Interest-Punktes innerhalb eines lokalen Fensters erfolgt durch Suche nach h_{\max} .

Der Harris-Operator ist nicht maßstabsinvariant.

(Harris & Stephens, 1988)



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.3 Kantenextraktion

Eine Kante befindet sich im Bild an Stellen, wo Bereiche mit unterschiedlichen Grauwerten aufeinanderstoßen.

$$\text{grad } g(r, c) = \nabla g(r, c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_r \\ g_c \end{pmatrix} \quad \dots \text{ Gradient}$$

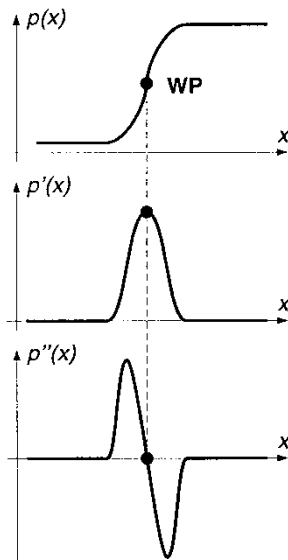
Der Gradient zeigt in die Richtung der stärksten Grauwertänderung und sein Betrag ist umso größer, je stärker die Grauwertänderung ist.

Betrag des Gradienten: $\|\nabla g(r, c)\| = \sqrt{g_r^2 + g_c^2}$ (total image gradient magnitude) optional: $|g_r| + |g_c|$

Richtung des Gradienten: $\theta = \arctan \frac{g_r}{g_c}$

Der Gradient steht normal auf die Kante.

Die Lage der Kante im Bild ist über das lokale Maximum der Gradientenfunktion $\|\nabla g(r, c)\|$ bestimmt. Die 1. Ableitung der Grauwertfunktion hat dort ein Maximum, wo die 2. Ableitung der Grauwertfunktion einen Nulldurchgang (*zero crossing*) aufweist. \Rightarrow Der genaue Ort der Kante ergibt sich also als Wendepunkt der Grauwertfunktion.



Lokalisieren der Kante als Wendepunkt

Gradienten-Filter (Ableitungsfilter 1. Ordnung):

- Roberts-Operator
- Sobel-Operator
- Prewitt-Operator
- Compass-Operator
- Kirsch-Operator

Faltung mit 2×2 bzw. 3×3-Filtermatrizen.
 Auch größere Filtermatrizen sind möglich.
 Berechnung des Betrages des Gradienten ist nicht-linear.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.3 Kantenextraktion

Für die Berechnung der 2. Ableitung einer diskreten Bildfunktion wird der **Laplace-Operator** verwendet:

$$\nabla^2 g(r, c) = \Delta g(r, c) = \text{div grad } g(r, c) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial c^2} = g_{rr} + g_{cc}$$

Operatoren: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Bei allen Differentialverfahren muss beachtet werden, dass die Operatoren umso anfälliger für Rauschen sind, je höher der Grad der Ableitung ist, weshalb die Bilder vor Anwendung des Operators geglättet werden müssen (vgl. Abschnitt 8.3.2.3).

Glättung durch Gauß-Funktion $G_\sigma(r, c)$

$$G_\sigma(r, c) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2+c^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{c^2}{2\sigma^2}} = G_\sigma(r) \cdot G_\sigma(c)$$

$$\nabla G_\sigma(r) = -\frac{r}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{r^2+c^2}{2\sigma^2}}$$

$$\nabla G_\sigma(c) = -\frac{c}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{r^2+c^2}{2\sigma^2}}$$

$$\nabla g(r, c) = \begin{pmatrix} g * \nabla G_\sigma(r) \\ g * \nabla G_\sigma(c) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 (g * G_\sigma) = g * \nabla^2 G_\sigma$$

$$\nabla^2 G_\sigma = \text{LoG} = \frac{r^2 + c^2 - 2\sigma^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\frac{r^2+c^2}{2\sigma^2}} \quad \dots \quad \text{Laplacian of Gaussian}$$

("mexikanischer Hut", "mexican hut", "Sombrero-Operator")

Der LoG-Operator kann rechenstechnisch auch als Differenz zweier Gaußverteilungen mit unterschiedlichem σ angenähert werden.

z.B. $G_1(x, \sigma = 1) - G_2(x, \sigma = 2)$

Dieser Operator heißt dann **Difference of Gaussian (DoG)**.

Bei einem Verhältnis $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1.6$ wird eine gute Annäherung des DoG- an den LoG-Operator erzielt.

Im 2D-Fall liegt der Null-Durchgang im Abstand $\sqrt{2}\sigma$ vom Ursprung. $\Rightarrow w = 2\sqrt{2}\sigma$

Bei ca. einem Abstand von 1.5 w ist der Funktionswert von LoG nahezu Null.

1D $\Rightarrow w = 2$ und $\nabla^2 G(3) \approx 0$

2D $\Rightarrow w = 2\sqrt{2}$ und $\nabla^2 G(4.2) \approx 0$

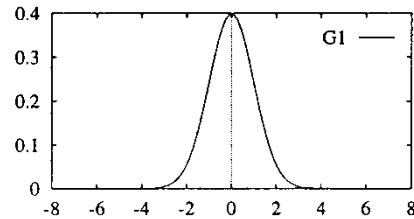


8. Bildzuordnungsverfahren

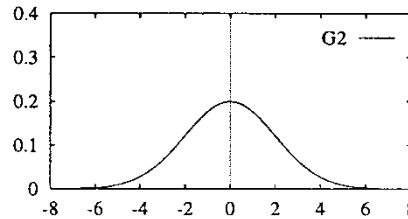
8.3.3 Kantenextraktion

Laplace-Pyramide: $L^k = g^k - g^k * G_\sigma$ (vgl. *unsharp masking*)

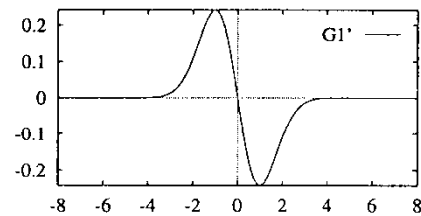
"Scaling theorem for zero crossings": *scale space* (Skalenraum) $\rightarrow (r,c,\sigma)$ -Koordinaten
 Durch Verwendung eines Gauß-Filters können keine neuen "zero crossings" entstehen.
 Die *zero crossings* sind immer geschlossene Linienzüge.



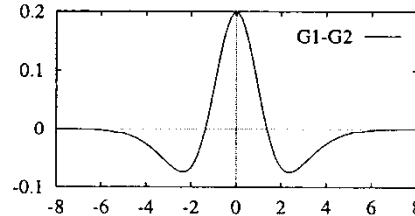
(a) $G_1(x), \sigma = 1$



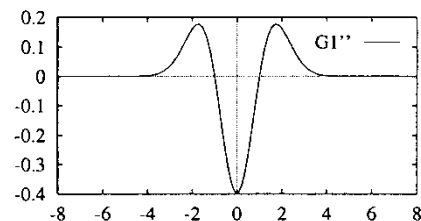
(b) $G_2(x), \sigma = 2$



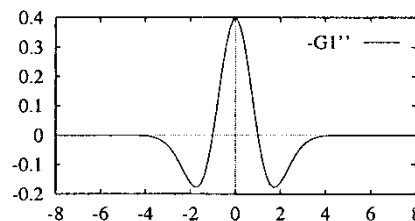
(c) ∇G_1



(d) $G_1 - G_2$ (DoG)

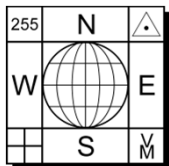


(e) $\nabla^2 G_1$ (LoG)



(f) $-\nabla^2 G_1$

Laplacian of Gaussian (LoG) und Difference of Gaussian (DoG)



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.3 Kantenextraktion

Sehr weit verbreitet ist der **Canny edge detector (Canny-Operator)**. Er gehört in die Gruppe der LoG-basierten Kantenoperatoren und optimiert folgende Gütekriterien einer Kantenbestimmung:

- Empfindlichkeit gegenüber wahren Kanten (Eindeutigkeit der Kante → only one response to a simple edge)
- Störfestigkeit gegenüber Rauschen (maximales Signal-Rausch-Verhältnis, SNR ... Signal-to-Noise-Ratio, → good detection)
- Genauigkeit der Kantenposition (good localisation)

Der Canny-Operator liefert eine Liste zusammenhängender Konturpunkte mit Subpixel-Auflösung und kann auch in die Verfahren der Kantenverfolgung eingeordnet werden.

Eine Weiterentwicklung ist der **Deriche-Operator**.

Einige Methoden der Subpixel-Interpolation von Kantenpunkten (aus Th. Luhmann, 2003):

<u>Verfahren</u>	<u>Modell</u>	<u>Zwischenergebnis</u>	<u>Subpixel-Interpolation</u>
Ableitungsfilter	Wendepunkt	Gradientenbild	lineare Interpolation
Moment-Preservation	Grauwertplateaus	Momente	Auflösung von 3 Gleichungen
Musterkorrelation (template matching)	Kantentemplate, Kreuzkorrelation	Korrelationskoeffizienten	Interpolation 2. Grades
Kleinste-Quadrate- Anpassung (least-squares matching, LSM)	Kanten-Template, geom. und radiometrische Transformation	bis zu 8 Transformationsparameter	Verschiebungsparameter

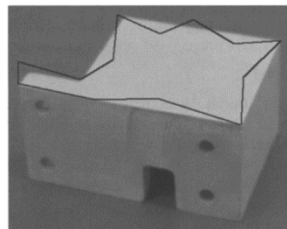
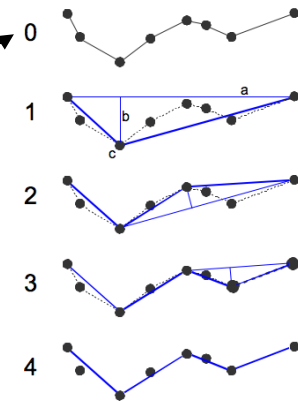


8. Bildzuordnungsverfahren

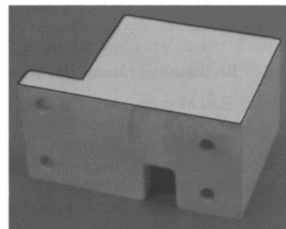
8.3.3 Kantenextraktion

Nachbearbeitung (LoG-Operatoren ausgenommen):

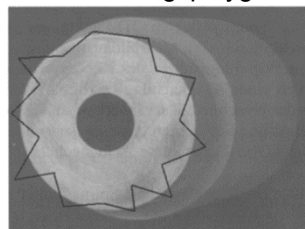
- Entfernen von sehr kurzen isolierten Kantenstücken oder das Schließen von sehr kleinen (etwa 1-2 Pixel großen) Lücken durch **morphologische Operatoren** (Erosion, Dilatation → Opening, Closing). Einfach ⇒ begrenzte Möglichkeiten.
- Intelligenter Verknüpfung von Kanten-Elementen → **Hough-Transformation** zur Erkennung von Geraden in binarisierten Kantenbildern.
 - **verallgemeinerte Hough-Transformation** zur Detektion von anderen (parametrisierbaren) Formen, wie z.B. Kreisen oder Ellipsen.
 - Berücksichtigung der **Kantenrichtung**
 - **Douglas-Peucker-Algorithmus** (Algorithmus zur Linienglättung)



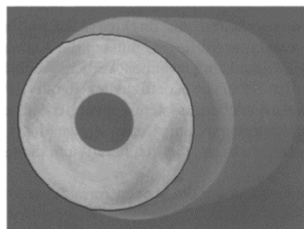
Näherungspolygon



Ermittelte Raumkurve



Näherungspolygon



Ermittelte Raumkurve

Aktive Konturlinien (*Snakes*)

Das Modell der *Snakes* wurde 1987 erstmals vorgestellt. Eine *Snake* ist ein energieminimierender *Spline*, der durch äußere begrenzende Kräfte aufgespannt wird und von "Bildkräften" beeinflusst werden kann. Die Bildkräfte ziehen die *Snakes* zu Bildmerkmalen wie Linien, Kanten oder Punkten hin.

← Konturmessungen durch LSB-Snakes (LI & Grün, 1997)



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.4 Flächenextraktion

Quelle: Manual of Photogrammetry, 2004.

A region is a two-dimensional feature in the mathematical sense.
Image segmentation → regions of constant texture and color

Typical properties of regions are

- Set of connected pixels; 4- and 8-neighborhoods are distinguished.
- Size (area), perimeter, and center of gravity of the polygon.
- Average gray value, standard deviation, minimum and maximum value of the gray value.

(1) Image segmentation by thresholding

- global and adaptive thresholding
- histogram segmentation: bimodal histogram, etc.
- generation of connected components and bounding polygons

(2) Region growing

- merge new pixel with region; start with seed pixel
- merge two regions; region must be larger than n_{\min} pixels

(3) Split and merge

- quad-tree generation



8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.5 Korrespondenzanalyse

Das Ergebnis eines Interest-Operators ist eine unstrukturierte Liste von Bildpunkten (Koordinaten und Interest-Wert) von jedem beliebigen Bildpunkt. Aufgabe der Korrespondenzanalyse ist es, aus dieser Liste aufgrund des vorliegenden Interest-Wertes und der Position im jeweiligen Bild eine Schnittmenge korrespondierender Punkte zu ermitteln. Die Komplexität dieser Aufgabe ist wesentlich abhängig von:

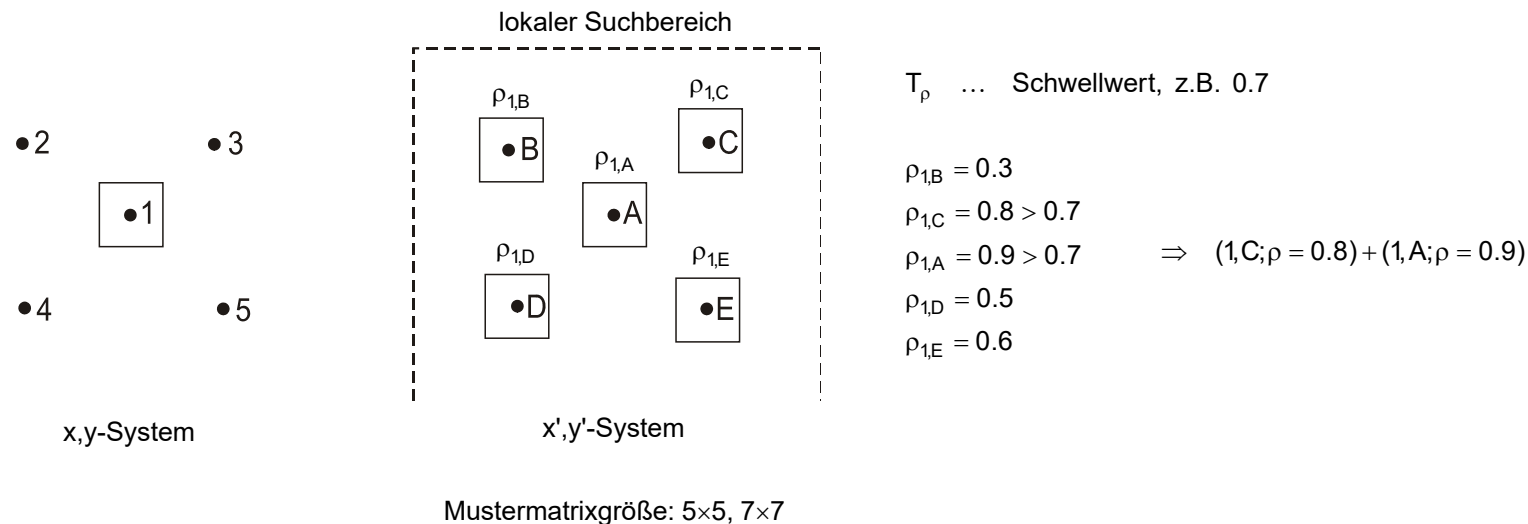
- Aufnahmekonfiguration der Bilder (Stereoaufnahme, konvergente Aufnahme)
- verfügbare geometrische Informationen (Näherungswerte, Orientierungsparameter)
- Oberflächenstruktur des Objektes (projizierte Muster, Kantenvielfalt, Verdeckungen).

Aus den punkt- und linienförmigen Merkmalen wird eine Liste von Zuordnungskandidaten mit Eigenschaften aufgestellt. Als Eigenschaften können direkt die (primitiven) Bildmerkmale (Grauwerte, Interest-Werte, Kantenparameter) oder daraus abgeleitete höhere Charakteristika (z.B. Relationen) verwendet werden. Einschränkung des Suchraumes durch a priori Wissen möglich.

Es gilt zahlreiche merkmalsbasierte Zuordnungsverfahren.

(1) Least squares feature-based matching (in photogrammetry)

In einem ersten Schritt werden mögliche Punktpaare durch Berechnung des normierten Kreuzkorrelationskoeffizienten bestimmt.





8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.5 Korrespondenzanalyse

Im darauffolgenden Schritt erfolgt eine **robuste Schätzung** (robust least squares adjustment oder auch RANSAC, etc.) von geeigneten Transformationsparametern für die geometrische Zuordnung von beiden Punktmengen. Für viele Anwendungen ist eine **Affin-Transformation** ausreichend (vgl. auch das Beispiel im Abschnitt 3.9).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Punktauswahl wird auf kleine Bildbereiche mit z.B. 20-40 Punktpaaren eingeschränkt.

Robuste Schätzung durch Gewichts-Iteration: Für die Berechnung der Gewichte im ersten Durchgang können die Korrelationskoeffizienten herangezogen werden. Anpassung der Gewichte nach jeder Iteration (vgl. Abschnitt 3.15.5). Beobachtungen mit hohem Gewicht legen die endgültigen Punktzuordnungen fest.

Für die Berechnung des Kreuzkorrelationskoeffizienten müssen gute Näherungen für Rotations- und Maßstabsdifferenz der beiden Bilder vorliegen → eventuell geometrische Anpassung durch Resampling.

Für die Auswahl der möglichen Punktepaare im ersten Schritt ist dafür Sorge zu tragen, dass entweder durch gute Näherungswerte für die Translation der homologen Bildbereiche oder durch geeignete Wahl der Größe des Testbereiches im Suchbild ein entsprechend großer Überlapp der homologen Bildbereiche gewährleistet ist.

Genauigkeitssteigerung: Anschließendes LSM mit den so berechneten homologen Bildpunkten der merkmalsbasierten Methode.

Für gebirgiges Gelände, städtisches Gebiet und bei Anwendungen im Nahbereich ist die Glattheit der Bildparallaxen nicht gewährleistet. In diesen Fällen ist statt der oben erwähnten Affin-Transformation das strenge geometrische Modell der relativen Orientierung (z.B. mit 5 Parametern für kalibrierte Kameras) zu wählen.

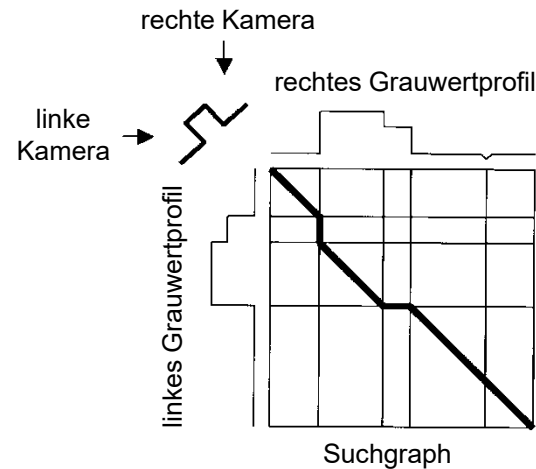


8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.5 Korrespondenzanalyse

(2) Dynamische Programmierung

Bei der Methode der dynamischen Programmierung (*dynamic programming*) werden keine geometrischen Transformationsparameter berechnet, sondern es werden nur korrespondierende Punkte ermittelt. Die dynamische Programmierung lässt sich z.B. für die eindimensionale Suche nach korrespondierenden Punkten in Epipolarbildern einsetzen, in denen die Merkmale direkt durch das Grauwertprofil gebildet werden.



Opake Oberfläche \Rightarrow Kanten sind geordnet

horizontaler (vertikaler) Pfad \Rightarrow Intervall zwischen Kanten im rechten (linken) Bild ist im linken (rechten) Bild verdeckt.

Viterbi-Algorithmus \Rightarrow Komplexität $O(N_L^2, N_R^2)$ \rightarrow wegen "ordering constraint"
 $N_L, N_R \dots$ Zahl der Kanten in beiden Bildern

Die Komplexität der Suche kann durch Vorgabe von maximalen Disparitäten eingeschränkt werden. Weiters muss Konsistenz über benachbarte Epipolarlinien herrschen (\rightarrow *continuity constraint*).

Für zwei Listen von Objektmerkmalen (z.B. Kanten) wird eine **Kostenfunktion** definiert, die den optimalen Pfad zwischen zwei Punkten (Kandidatenpaar) beschreibt. Jeder möglicher Pfad besteht aus einer Menge von Knoten. Die zu minimierenden Gesamtkosten setzen sich aus der Summe der Einzelkosten zwischen den Knoten zusammen.

(3) Relaxation

Statistischer Ansatz, bei dem die besten (wahrscheinlichsten) Zuordnungen unter Berücksichtigung von Nachbarschaftsbeziehungen – abgeleitet aus den Eigenschaften der zuzuordneten Objekte – iterativ ermittelt werden.

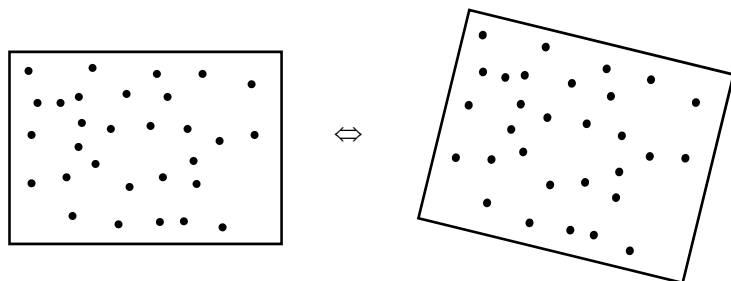


8. Bildzuordnungsverfahren

8.3.5 Korrespondenzanalyse

(4) Clustering in a parameter space

→ generalized Hough transform



z.B.: 30 Kandidatenpaare, konforme Koordinatentransformation

$$\Rightarrow \binom{30}{2} = 435 \text{ Möglichkeiten der Berechnung der Transformationsparameter}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & -a_4 \\ a_4 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow 4 \text{ Parameter:} \\ \text{Verschiebung, Maßstab, Verdrehung}$$

Abbildung von Mustern/Zuordnungen in den **Parameterraum**.

Erkennen der Muster/Zuordnungen im Bildraum wird ersetzt durch das **Finden von lokalen Maxima** (= Clustern) im Parameterraum.

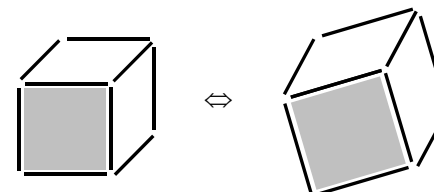
Der kontinuierliche Parameterraum muss aus rechentechnischen Gründen diskretisiert werden.

Ist der Parameterraum hochdimensional \Rightarrow speicher- und rechenintensiver Prozess.

→ kombinatorisches Problem (große Anzahl von Möglichkeiten!) \Rightarrow zufällige Auswahl \Rightarrow *random sample consensus (RANSAC)*

(5) Relationale Zuordnung (relational/graph matching)

Die Korrespondenzanalyse mit relationaler Bildzuordnung nutzt neben den Bildmerkmalen auch geometrische Relationen zwischen den Objekten aus. Die relationale Bildzuordnung dient vor allem der höheren Objekterkennung und Szenenbeschreibung.



Bidirectional matching (back-matching, consistency check)

L \rightarrow R

R \rightarrow L'

$$(x_L, y_L) \xrightarrow{\text{matching}} (x_R, y_R) \xrightarrow{\text{back-matching}} (x'_L, y'_L)$$

$$d = \sqrt{(x_L - x'_L)^2 + (y_L - y'_L)^2}$$

Test: $d \leq T$ good solution
 $d > T$ bad solution



8. Bildzuordnungsverfahren

8.4 Hierarchical Image Matching

Bildpyramide

Quelle: A. Pinz, 1994, Bildverstehen.

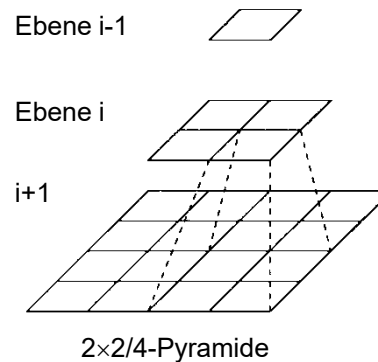
Unter einer Bildpyramide versteht man eine Menge von Bildern mit **unterschiedlicher räumlicher Auflösung** und **gleichem Inhalt**. Die Bilder werden dabei entsprechend ihrer Auflösung in **Ebenen** angeordnet. Der Zusammenhang zwischen zwei benachbarten Ebenen ist üblicherweise **regelmäßig** und **lokal**.

Allgemein kann jede (regelmäßige) Pyramide durch 3 Kenngrößen beschrieben werden:

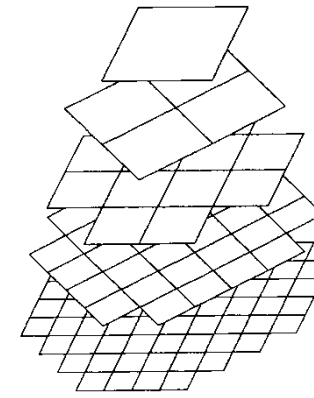
- Reduktionsfenster,
 - Reduktionsfaktor und
 - Reduktionsfunktion.
- Beispiele: $2 \times 2/4$, $2 \times 2/2$, $4 \times 4/4$, $3 \times 3/4$, $5 \times 5/4$.



Beispiel einer $2 \times 2/4$ -Pyramide



$2 \times 2/4$ -Pyramide



$2 \times 2/2$ -Pyramide

Bei allen Architekturen, wo das Reduktionsfenster größer ist als der Reduktionsfaktor (z.B. $4 \times 4/4$) ergibt sich ein sogenannter *Überlapp*, das heißt, jedes Pixel der untersten Ebene trägt zu mehreren Pixeln der darüberliegenden Ebene bei. Dies führt zu einem robusteren Verhalten als in der $2 \times 2/4$ -Pyramide ohne Überlapp.

Reduktionsfunktionen: Mittelwert, gewichtete Mittelung mit Gauß'schem Kern, Minimum, Maximum, Subsampling (→ bei einem Reduktionsfaktor k wird einfach jedes k -te Pixel ausgewählt), etc.

Die Verwendung von Bildpyramiden ist u.a. auch biologisch begründbar.

Da es sich bei der Bildpyramide um eine regelmäßige Struktur handelt und die Reduktion lokal arbeitet, ist die Möglichkeit der **Parallelisierung** gegeben.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.4 Hierarchical Image Matching

Gauß-Pyramide:

Bei der Gauß-Pyramide wird im Reduktionsfenster mit einem Gauß'schen Kern (= 2D Normalverteilung, vgl. Abschnitt 8.3.2.3) gewichtet gemittelt.

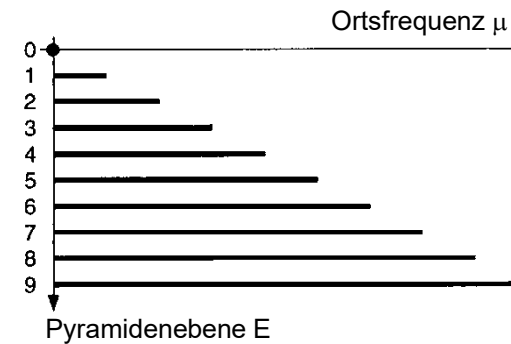
Reduktionsfunktion: $\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Einheitsimpuls}} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ * ... Faltungsoperator

Approximation der 1D Normalverteilung durch Binomialkoeffizienten

→ 3×3/k-Gauß-Pyramide mit Subsampling jeder k-ten Stelle

Informationsgehalt →



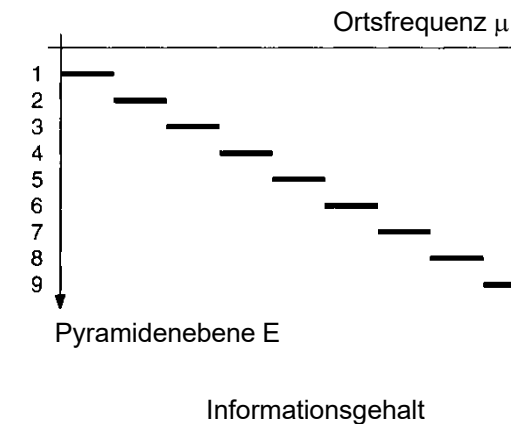
Laplace-Pyramide:

Bei der Gauß-Pyramide wird eigentlich sehr viel redundante Information gespeichert.

2×2/4-Pyramide → $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots \leq 1\frac{1}{3}$ (Speicherplatzbedarf)

Bei der Laplace-Pyramide erfolgt die Kodierung des Bildes durch verschiedene **Frequenzbänder**. Diesen Bändern entsprechen sukzessive Bandpassfilterungen. Man kann die Laplace-Pyramide parallel zur Gauß-Pyramide aufbauen, indem man das Bild mit dem Gauß-Kern faltet und dann das Ergebnis vom Originalbild subtrahiert (vgl. DoG mit Anwendung im SIFT Keypoint Operator, Abschnitt 8.3.2.5).

Kurven-Pyramide: Sonderform für Kurvenrepräsentation





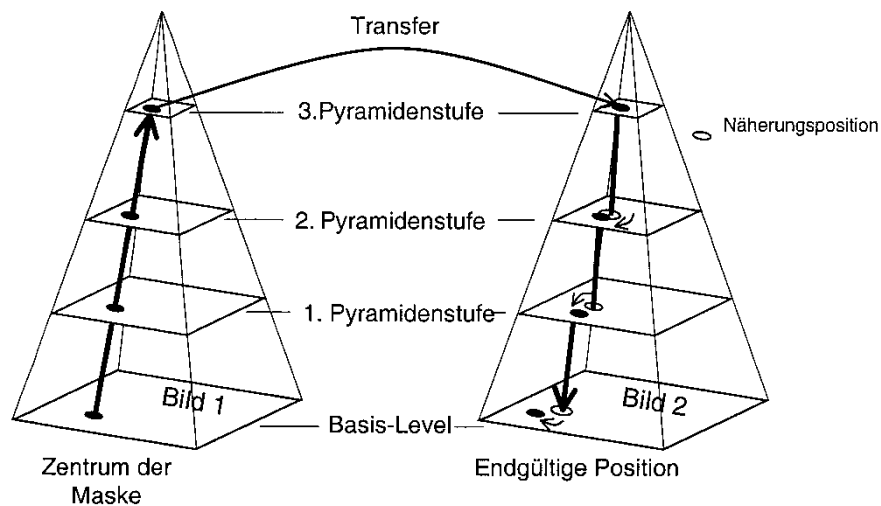
8. Bildzuordnungsverfahren

8.4 Hierarchical Image Matching

Anwendungen:

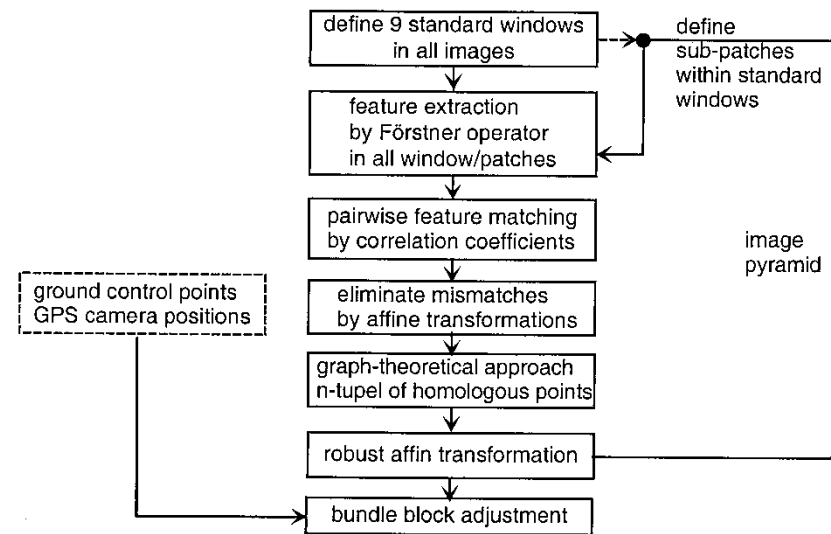
- Bilddarstellung am Bildschirm mit variablem Zoom-Faktor
- Blob-Detection
- Such-Algorithmen (hierarchical image matching)
- Bildkompression

coarse-to-fine strategy



Hierarchische Bildzuordnung
(Fritsch, 1999, PhoWo-Tutorial)

Problem: Überschreiten des Konvergenzradius (bei zuwenig Pyramidenebenen)



Automatische Aerotriangulation nach V. Tsingas (1992).



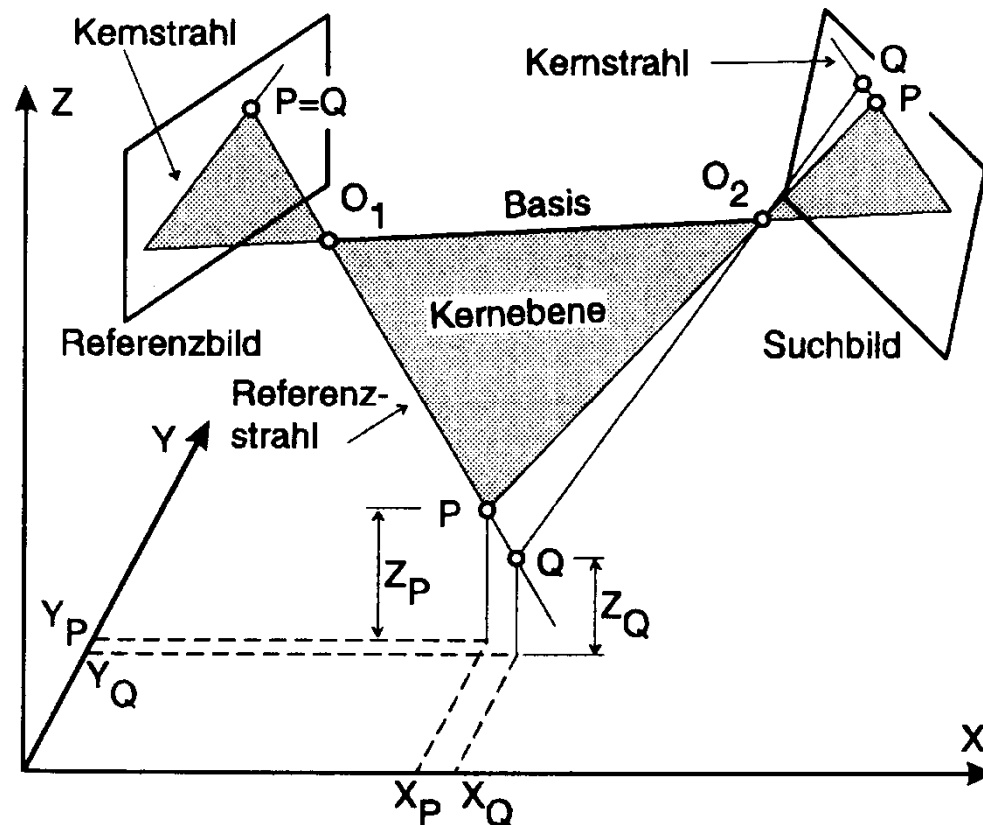
8. Bildzuordnungsverfahren

8.5 Bildzuordnung mit geometrischen Zwängen

8.5.1 Bildzuordnung im Bildpaar

Eine entscheidende Vereinfachung des Zuordnungsproblems ergibt sich, wenn die relative Orientierung der beteiligten Bilder bekannt ist.

→ Automatische Erfassung von Oberflächen



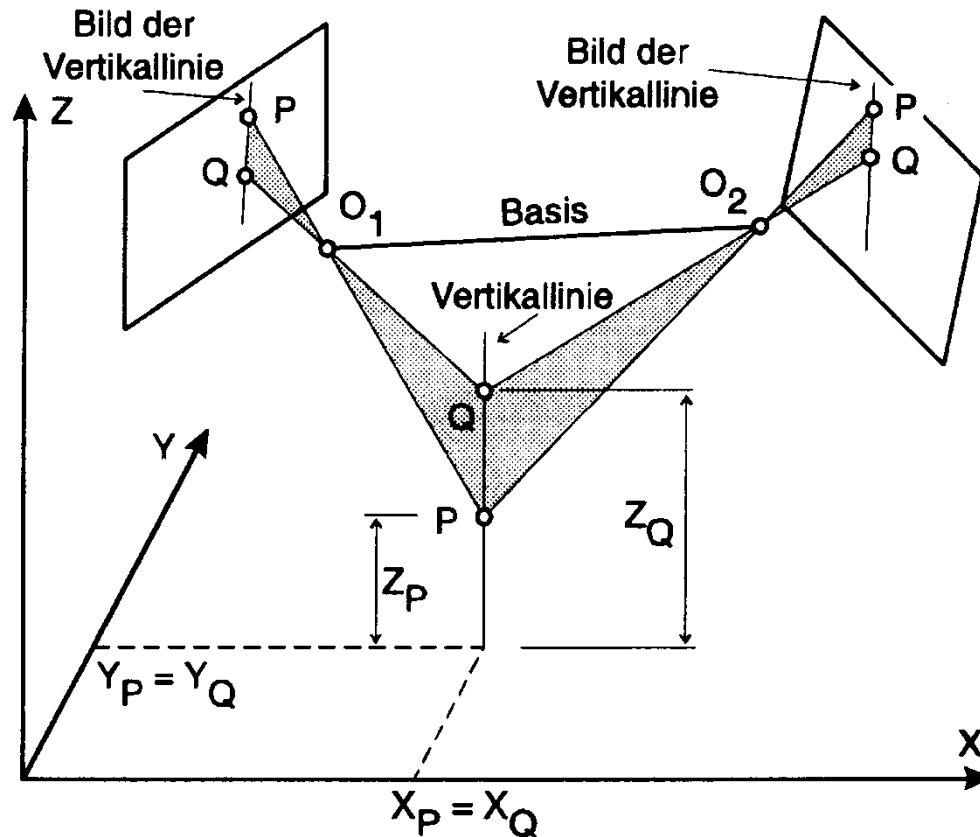
a) Zuordnung mit Kernlinien im Bildpaar
XYZ-Version



8. Bildzuordnungsverfahren

8.5 Bildzuordnung mit geometrischen Zwängen

8.5.1 Bildzuordnung im Bildpaar



b) VLL (Vertical-Line Locus)-Zuordnung
Z-Version

Anmerkungen:

Äußere Orientierung der beiden Messbilder sei bekannt. XY-Koordinate eines Objektpunktes wird vorgegeben. Der Z-Wert soll bestimmt werden. Die Lotlinie durch den Objektpunkt kann in die beiden Messbildern abgebildet werden. Die beiden Bildgeraden VLL ("relief displacement lines") gehen durch die Bilder des gesuchten Oberflächenpunktes.

→ area-based matching → Das Maximum des Ähnlichkeitsmaßes (z.B. NCC-Wert) legt den gesuchten Objektpunkt mit seinen XYZ-Koordinaten fest.

Ergibt der Suchprozess keine gültige Lösung, so ist in einem der beiden Bilder (oder eventuell auch in beiden) der gesuchte Oberflächenpunkt verdeckt.

⇒ regelmäßiges XY-Raster

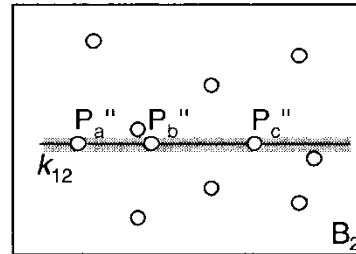
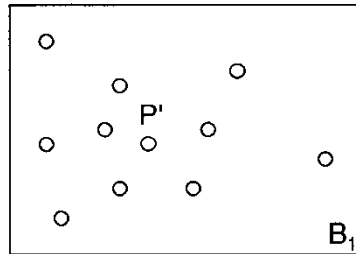
Approximation der Oberfläche:
 └─ horizontale Ebene
 └─ schräge Ebene (Approximation durch bereits berechnete Punkte)
 ↓
 geometr. Korrektur der Bildmatrizen



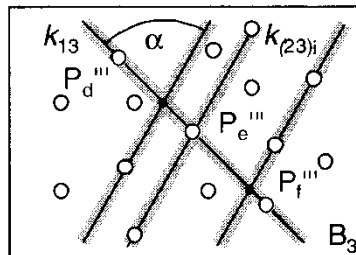
8. Bildzuordnungsverfahren

8.5 Bildzuordnung mit geometrischen Zwängen

8.5.2 Bildzuordnung im Bildtripel



(Quelle: Th. Luhmann, 2003)



Zuordnung mit Kernlinien im Bildtripel
(Identifizierung des Punktes P)

Eine deutliche Reduktion der Mehrdeutigkeiten ergibt sich, wenn die Anzahl beteiligter Bilder erhöht wird. Obige Abbildung zeigt das Zuordnungsprinzip bei der Anordnung von drei Bildern. Geht man von einem Bildpunkt P' im Bild B_1 aus, lassen sich die zugehörigen Kernlinien k_{12} und k_{13} in den anderen Bildern berechnen. In beiden Bildern mag es zu Mehrdeutigkeiten kommen, indem die Kandidaten P_a'' , P_b'' , P_c'' in Bild B_2 sowie P_d''' , P_e''' , P_f''' in Bild B_3 ermittelt werden, so dass die homologen Punkte zu P' nicht eindeutig bestimmt werden können. Berechnet man nun die Kernlinien $k_{(23)i}$ im Bild B_3 für alle Kandidaten P_i in B_2 , liegt mit hoher Wahrscheinlichkeit nur einer der Schnittpunkte mit k_{13} in der Nähe der Kandidaten von Bild B_3 , in diesem Beispiel P_e''' .

Der Suchraum wird also auf den Toleranzbereich der Schnittpunkte eingeschränkt.

Die Mehrdeutigkeiten werden minimal, wenn die drei Kameras in einem gleichsinnigen Dreieck ($b_{12}=b_{13}=b_{23}$; $\alpha=60^\circ$) angeordnet sind.

Die geschilderte Strategie versagt, falls die 3 Projektionszentren auf einer Geraden liegen.

⇒ Lösung nur durch trifokalen Tensor möglich!



8. Bildzuordnungsverfahren

8.5 Bildzuordnung mit geometrischen Zwängen

8.5.3 Multi-image geometrically constraint matching



$$x + v_x = (F_x) + dx + \Delta x$$

$$y + v_y = (F_y) + dy + \Delta y$$

$$x = x(a_m; h_k)$$

$$y = y(a_m; h_k)$$

$$(x) - (F_x) + v_x = dx + \frac{\partial x}{\partial a_m} da_m + \frac{\partial x}{\partial h_k} dh_k$$

$$(y) - (F_y) + v_y = dy + \frac{\partial y}{\partial a_m} da_m + \frac{\partial y}{\partial h_k} dh_k$$

zusätzliche (fiktive) Beobachtungen

$$\Delta g + v = \frac{\partial g}{\partial a_m} da_m + \frac{\partial g}{\partial h_k} dh_k$$

$$I + v = Ax \quad \dots \text{multi-image matching}$$

$$w + v = By$$

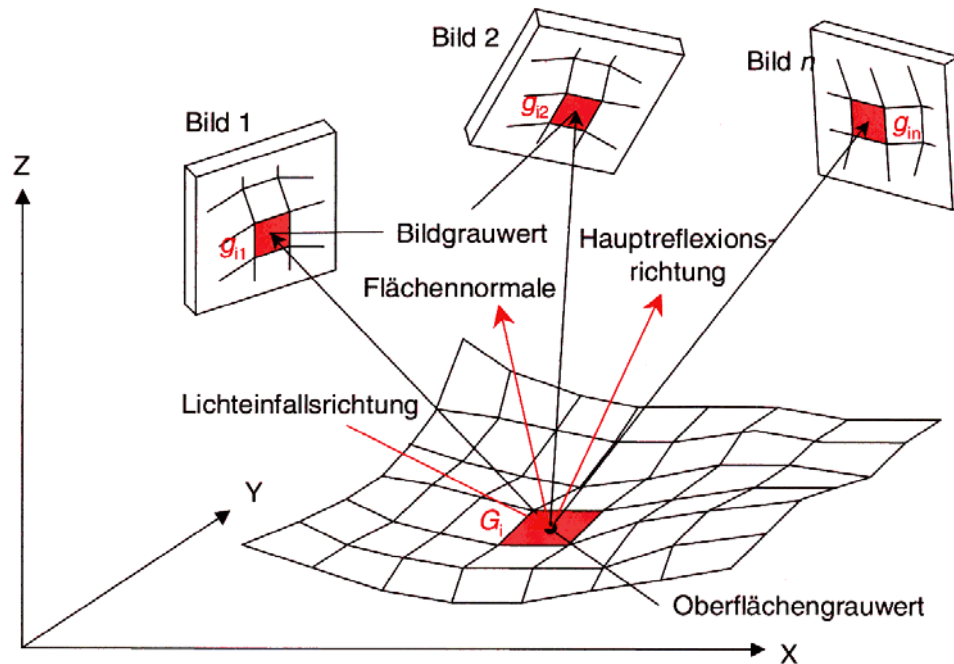
- Extension of LSM (geometric fit through an affine transformation, radiometric fit through an additive and multiplicative parameter)
- Simultaneous matching/point positioning (Determination of XYZ, or Z over fixed XY)
- Sensor orientation assumed known or determined simultaneously by using control elements
- Relation of image and object space through collinearity constraints
- Collinearity constraints treated as fictitious weighted observations (i.e. errors in the sensor orientation can be modelled)
- Strict modelling of deviations from collinearity (inclusion of additional parameters)
- Use of any number of images. Increase of precision and especially reliability.
- Use of different sensors
- Derivation of approximations by use of an image pyramid with the same or other algorithms
- Matching at points selected by an interest operator (points with high grey level gradients in the direction of epipolar/ "relief displacement" line)
- Tests on the significance and determinability by data-snooping
- Test for error detection, for each point and each image ray
- For detailed investigations and side aspects see Baltsavias (1991)
- For other image-based constraints (optionally combined with the collinearity constraints) for high-precision edge detection and tracking see Grün & Stallmann (1991).



8. Bildzuordnungsverfahren

8.5 Bildzuordnung mit geometrischen Zwängen

8.5.4 Objektgestützte Mehrbildzuordnung



Zusammenhang zwischen Oberflächen- und Bildgrauwert

Geometric and radiometric surface reconstruction by object-space least squares image matching

- Relates information from two or more digital images to an object space model.
- Object modelled by two surfaces, a geometric (height) and an optical density surface.
- Relation between image and object space through the collinearity equations.
- Other models involved (geometric and radiometric components): sensor, surface reflectance, radiance, irradiance, atmosphere.

With the exception of the geometric sensor model, all other models influence the optical densities, the image grey values and the relationship between the optical densities and image grey values.

Advantages:

- Theoretically interesting method, complete modelling
- Great potential for automated, geometric solutions
- General method. Can be used with modifications for photometric stereo, shade-from-shading, shape-from-ranging, raster stereography
- Exploitation of as much information as possible simultaneously
- Matching, geometric surface reconstruction and radiometric surface reconstruction (orthophoto) in one step
- Explicit modelling in object space

Problems:

- The simultaneous estimation of many parameters may lead to a more complete model but a less stable too. Due to instabilities, regularisation procedures are used, e.g. densities and heights are estimated separately and the loop is iterated.
- Discontinuities and occlusions cause problems
- Very difficult to implement in practice ...



8. Bildzuordnungsverfahren

8.4 Dense stereo matching: Semi-Global Matching (SGM)



(Quelle: R. Perko, 2011, Joanneum Research)



Base image



Match image



Normalized images,
(epipolar geometry)
see section 3.4



line 50
line 100
line 150

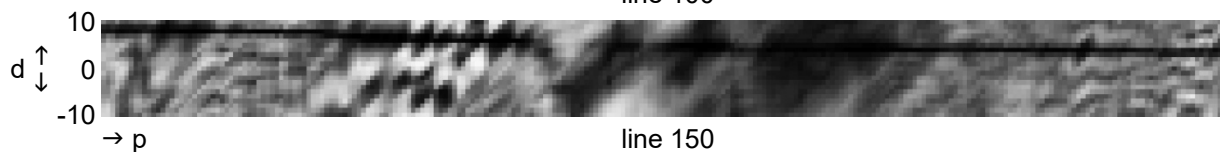
$C(p,d) = 1 - r$
dark ... low costs
bright ... high costs



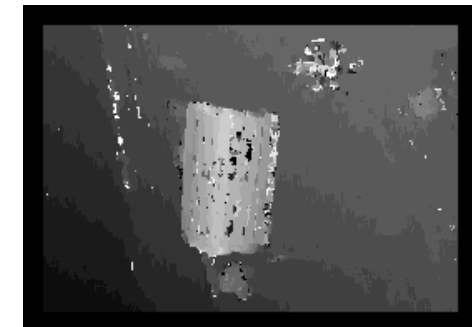
line 50



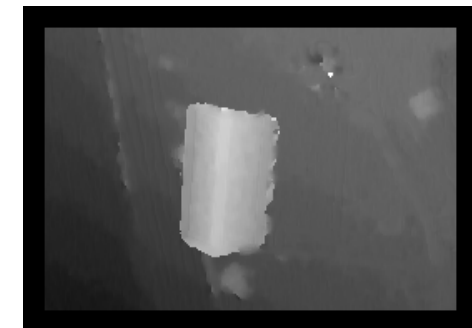
line 100



line 150



Disparity image: "Winner take all" (WTA),
cost function: NCC (pixel precision)



Disparity image: SGM
with sub-pixel precision



8. Bildzuordnungsverfahren

8.4 Dense stereo matching: Semi-Global Matching (SGM)



Quelle: H. Hirschmüller, 2005: Accurate and Efficient Stereo Processing by Semi-Global Matching and Mutual Information. IEEE CVPR, 8 pages.

1. Outline

The Semi-Global Matching (SGM) method is based on the ideas of *pixelwise matching* of Mutual Information (MI) and approximating a global, *2D smoothness constraint* by combining many 1D constraints. The algorithm is described in distinct processing steps, assuming a general stereo set geometry of two or more images with known *epipolar geometry*.

2. Pixelwise Cost Calculation

One choice of pixelwise cost calculation is Mutual Information, which is insensitive to recording and illumination changes. It is defined from the entropy H of two images (i.e. their information content) as well as their joint entropy. The entropies are calculated from the probability distributions P of intensities of associated images.

$$MI_{I_1, I_2} = H_{I_1} + H_{I_2} - H_{I_1, I_2}$$

3. Aggregation of Costs

Pixelwise cost calculation is generally ambiguous and wrong matches can easily have a lower cost than correct ones, due to noise, etc. Therefore, an additional constraint is added that supports smoothness by penalizing changes of neighboring disparities. The pixelwise cost and the smoothness constraints are expressed by defining the energy $E(D)$ that depends on the disparity image D .

$$E(D) = \sum_p C(p, D_p) + \sum_{q \in N_p} P_1 T[|D_p - D_q| = 1] + \sum_{q \in N_p} P_2 T[|D_p - D_q| > 1] \quad (1)$$

The $T[\dots]$ function controls the application of penalties; it is 1 in case that its argument is true and 0 if false.

The first term is the sum of all pixel matching costs for the disparities of D . The second term adds a constant penalty P_1 for all pixels q in the neighborhood N_p of p , for which the disparity changes a little bit (i.e. 1 pixel). The third term adds a larger constant penalty P_2 , for all larger disparity changes. Using a lower penalty for small changes permit an adaptation to slanted or curved surfaces. The constant penalty for larger changes (i.e. independent of their size) preserves discontinuities. Discontinuities are often visible as intensity changes. This is exploited by adapting P_2 to the intensity gradient, i.e.

$$P_2 = \frac{P'_2}{|I_{bp} - I_{bq}|}. \quad \text{However, it has always to be ensured that } P_2 \geq P_1.$$

The problem of stereo matching can now be formulated as finding the disparity image D that minimizes the energy $E(D)$. Unfortunately, such a global minimization (2D) is NP-complete for many discontinuity preserving energies. In contrast, the minimization along individual image rows (1D) can be performed efficiently in polynomial time using *Dynamic Programming*. However, Dynamic Programming solutions easily suffer from streaking, due to the difficulty of relating the 1D optimization of individual image rows to each other in a 2D image.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.4 Dense stereo matching: Semi-Global Matching (SGM)



The problem is, that very strong constraints in one direction (i.e. along image rows) are combined with none or much weaker constraints in the other direction (i.e. along image columns).

This leads to the new idea of aggregating matching costs in 1D from **all** directions equally. The aggregated (smoothed) cost $S(p,d)$ for a pixel p and disparity d is calculated by summing the costs of all 1D minimum cost paths that end in pixel p at disparity d (see Figure). It is noteworthy that only the cost of the path is required and not the path itself.

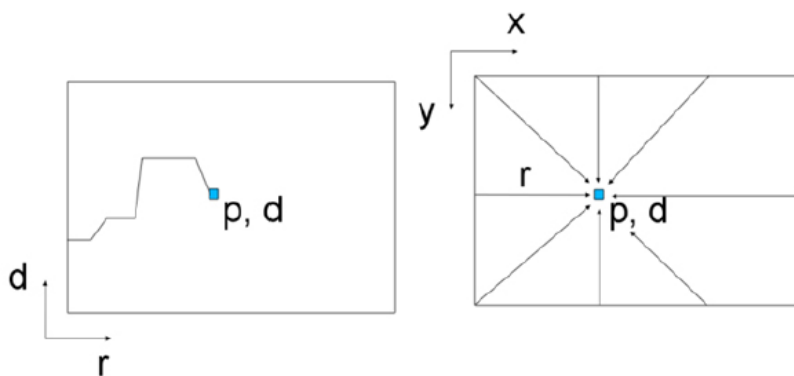


Figure: Eight optimization paths from different directions meet at every pixel.

Let L'_r be a path that is traversed in the direction r . The cost $L'_r(p,d)$ of the pixel p at disparity d is defined recursively as,

$$L'_r(p,d) = C(p,d) + \min[L'_r(p-r,d), L'_r(p-r,d-1) + P_1, L'_r(p-r,d+1) + P_1, \min_i L'_r(p-r,i) + P_2] \quad (2)$$

The remainder of the equation adds the lowest cost of the previous pixel $p-r$ of the path, including the appropriate penalty for discontinuities. This implements the behavior of equation (1) along an arbitrary 1D path. This cost does not enforce the *visibility* or *ordering* constraint, because both concepts cannot be realized for paths that are not identical to epipolar lines. Thus, the approach is more similar to *Scanline Optimization* than traditional Dynamic Programming solutions.

The value of L' permanently increase along the path, which may lead to very large values. However, equation (2) can be modified by subtracting the minimum path cost of the previous pixel from the whole term.



8. Bildzuordnungsverfahren

8.4 Dense stereo matching: Semi-Global Matching (SGM)



$$L'_r(p, d) = C(p, d) + \min[L'_r(p-r, d), L'_r(p-r, d-1) + P_1, L'_r(p-r, d+1) + P_1, \min_i L'_r(p-r, i) + P_2] - \min_k L'_r(p-r, k) \quad (3)$$

This modification does not change the actual path through disparity space, since the subtracted value is constant for all disparities of a pixel p . Thus the position of the minimum does not change.

The costs L' are summed over paths in all directions r . The number of paths must be at least 8 and should be 16 for providing a good coverage of the 2D image.

$$S(p, d) = \sum_r L'_r(p, d) \quad (4)$$

4. Disparity Computation

The disparity image D_b that corresponds to the base image I_b is determined as in local stereo methods by selecting for each pixel p the disparity d that corresponds to the minimum cost, i.e. $\min_d S(p, d)$. For sub-pixel estimation, a quadratic curve is fitted through the neighboring costs (i.e. at the next higher or lower disparity) and the position of the minimum is calculated.

Following Hirschmüller disparity images are generated corresponding to the base image and also to the match image by switching the role of base and match image. This allows for a *consistency check* of the disparity map: Larger disparity differences ($d > 0.5$) indicate mismatches, which are predominantly caused by *occlusions*; respective results are voided. Outliers are filtered from D_b and D_m using a median filter with a small window.

The consistency check enforces the *uniqueness constraint*, by permitting one to one mappings only.

5. Extension for Multi-Baseline Matching

The algorithm could be extended for multi-baseline matching, by calculating a combined pixelwise matching cost of correspondences between the base image and all match images.

Hirschmüller suggests to calculate several disparity images from individual image pairs, exclude all invalid points by consistency check and then combine the result.



8. Bildzuordnungsverfahren

Anmerkungen



9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

9.1 Einleitung



Eine künstliche Signalisierung der Objektpunkte ist notwendig:

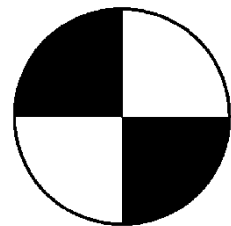
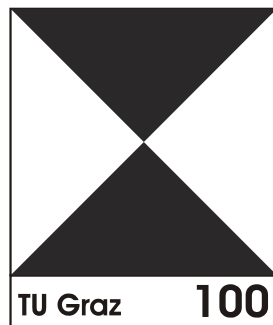
- bei ungenügend identifizierbaren natürlichen Objektpunkten,
- zur Bereitstellung eindeutig definierter Punkte für Vergleichsmessungen,
- zur geodätischen Messung von Passpunkten,
- zur automatischen Punktidentifizierung und -messung sowie
- zur Steigerung der Bildmessgenauigkeit.

Die Art und Größe der Punktmarken ist abhängig von:

- Aufnahmestandort
- Aufnahmerichtung
- Bildmaßstab
- Auflösungsvermögen der Kamera
- Beleuchtungsquelle
- Beleuchtungsrichtung

Es gibt zwei Arten von Punktsignalisierungen:

- ① **kreisförmige Zielmarken**
- ② **linienhafte Zielmarken**



linienhafte Zielmarken



kreisförmige Markentypen
(aus Gülker, 2004)



9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

9.2 Kreisförmige Zielmarken

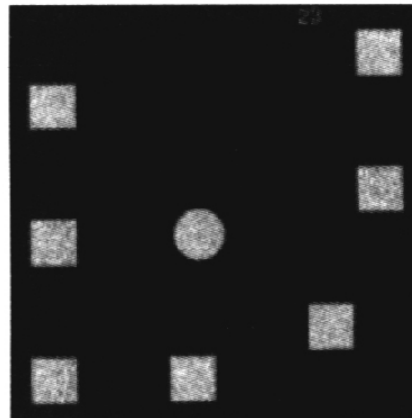


Radialsymmetrischer Aufbau:

- Der eigentliche Messpunkt (Zentrum der Marke) ist flächenhaft definiert.
- Die Bestimmung des Markenzentrums **rotationsinvariant** und in einem weiten Bereich auch **maßstabsinvariant**.
- Kreisförmige Zielmarken eignen sich sowohl für die **manuelle, interaktive Messung** als auch für die **automatische, digitale Punktmessung** (Punkterkennung und Messung)
 - manuell messbar mit kreis- oder punktförmiger Messmarke (●○○●○) analog
 - automatisch messbar (im Digitalbild) mit z.B. Schwerpunktoperator, Korrelation, LSM, Ellipsenoperator (vgl. Kapitel 10) digital



Kreismarke mit Punktnummer



Kreismarke mit Flächencode



Kreismarke mit Ringcode



9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

9.2.1 Retro-reflektierende Zielmarken

Besonders in industriellen Anwendungen haben sich **retro-reflektierende Zielmarken** durchgesetzt. Sie bestehen aus einer Reflexfolie, die entweder mit einer schwarzen Farbschicht entsprechend der Markenform abgedeckt ist (Maskierung) oder in entsprechender Form aus dem Rohmaterial herausgestanzt ist. Die Reflexfolie besteht aus einer dichten Anordnung kleiner reflektierender Kugeln ($\varnothing \approx 8 \mu\text{m}$). Retro-reflektierende Zielmarken müssen jeweils aus der Aufnahme­richtung der Kamera beleuchtet werden (z.B. mit einem Ringblitz), um eine zur Kamera zielgerichtete (Retro-)Reflexion des Lichtes zu ermöglichen.

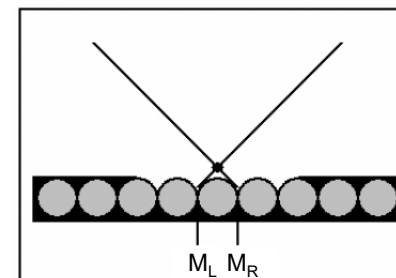
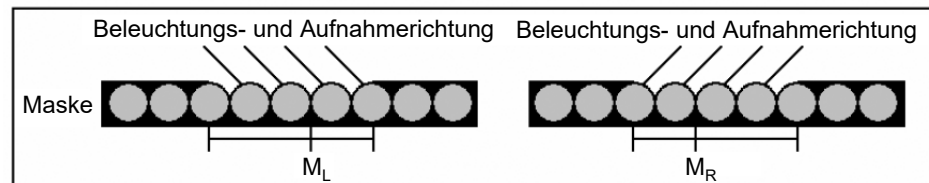


TRITOP-Messsystem der Firma GOM (Aufnahme Wiggenhagen, 2006)

Der Markenmittelpunkt ist abhängig von der Aufnahme­richtung (Dold, 1997). Wird eine maskierte Marke (von links und rechts) gemessen, liegt der triangulierte Messpunkt oberhalb der Zielmarkenoberfläche (vgl. Abb.). Bei einem ausgestanzten Punkt ist der triangulierte Messpunkt umgekehrt zur maskierten Marke versetzt, der rekonstruierte Punkt kommt unterhalb der Folienebene zu liegen. Der Effekt kann eine Größenordnung von $50 \mu\text{m}$ annehmen und ist entsprechend zu korrigieren.

Weitere Nachteile von Retromarken ergeben sich durch:

- relativ hohe Kosten pro Zielmarke aufgrund des Herstellungsprozesses
- Einschränkung bei besonders großen Zielmarken ($\varnothing > 10 \text{ mm}$)
- keine Möglichkeit zur Wiederverwendung selbstklebender Marken



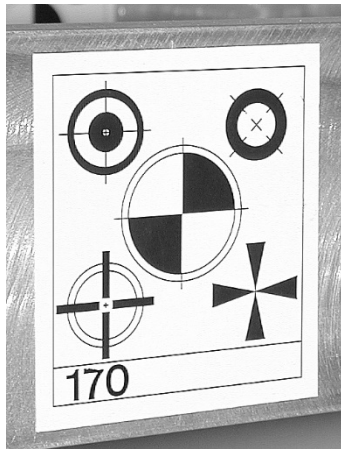
Zur Lage des virtuellen Zentrums kreisförmige Retromarken (Dold, 1997)



9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

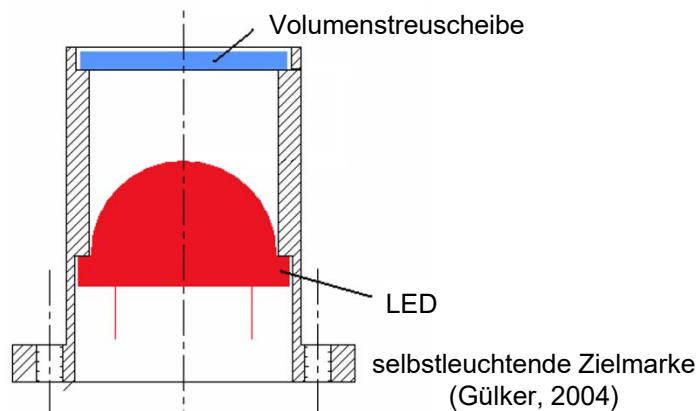
9.2.2 Sonstige Zielmarken

- Kreisförmige Kunststoffmarken mit zentrisch eingelassenem Zielpunkt → dauerhafte Markierung freistehender Objekte
- selbstklebende Papiermarken → temporäre Markierung von Verknüpfungspunkten
- auf Papier oder Klebefolie gedruckte Zielmarken, z.B. mit einem Laserdrucker hergestellt
→ billig, sehr gute Randschärfe, beliebige Muster möglich, Bildkontrast und Erkennbarkeit hängen stark von der aktuellen Beleuchtung ab.



Zielmarken auf Klebefolie (transportables Passpunktfeld, TU Graz)

- selbstleuchtende Zielmarken → aufwendige Herstellung. Sie werden in Anwendungen benötigt, in denen aufgrund der Umgebungsbedingungen keine künstliche Beleuchtung möglich ist oder in denen durch gezieltes An- und Abschalten der Leuchtmarke ein Aufnahme- oder Messprozess gesteuert werden muss. LED-Marken zeichnen sich durch optimalen Kontrast und Randschärfe aus.



LED ... *light emitting diode* (Leuchtdiode)

LEDs gehören zu der Gruppe der optoelektronischen Halbleiter-Bausteine, welche die Umwandlung von elektrischer Energie in Licht mit einer konstanten Frequenz ermöglichen.

Besondere Vorteile von LEDs sind: hohe Lebensdauer (10^5 h), annähernd monochromatisches Licht, unempfindlich gegenüber Stößen, bei Pulsbetrieb vernachlässigbare Erwärmung, hohe Leuchtkraft

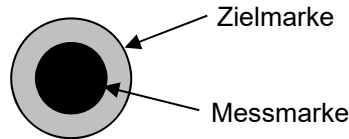


9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

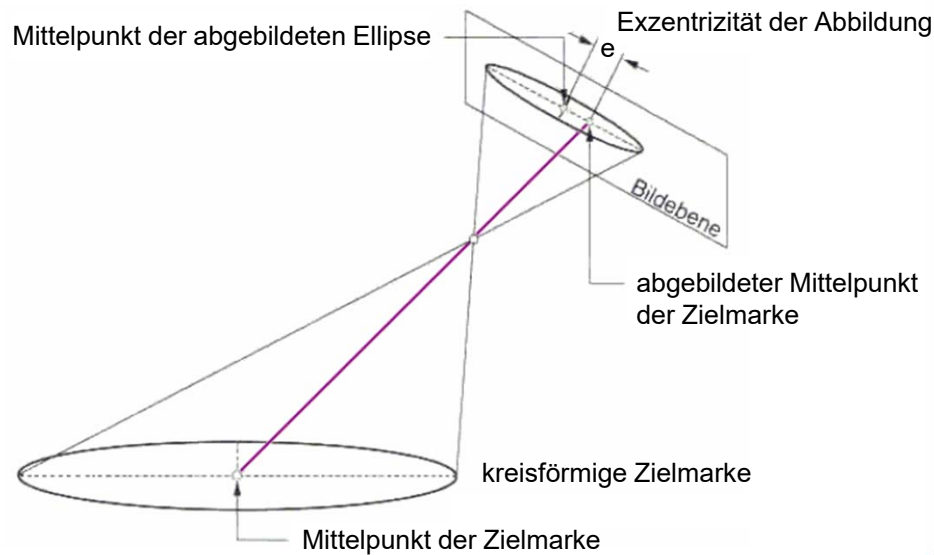
9.2.3 Markendurchmesser und Exzentrizität des Mittelpunktes



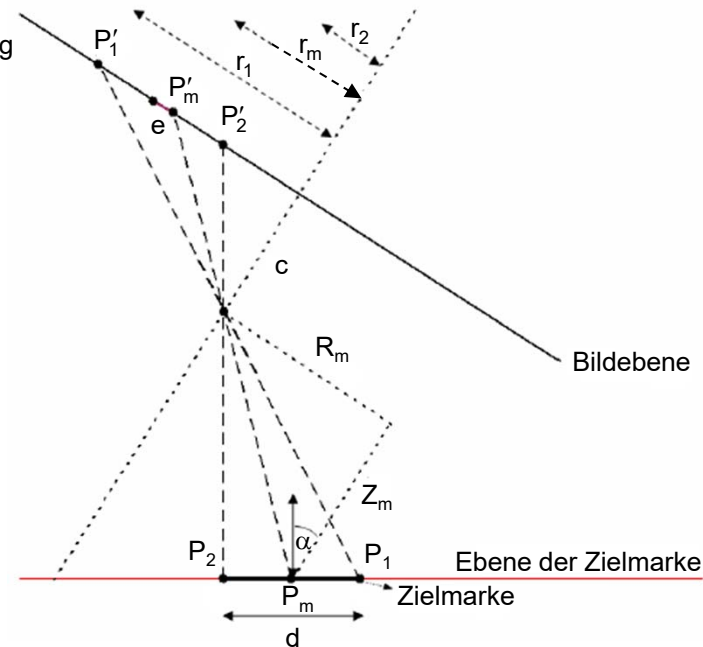
Zielmarken im digitalen Bild sollten einen Minstdurchmesser von ca. 5 Pixel nicht unterschreiten, da sonst keine ausreichende Bildinformation für die digitale Punktmessung vorhanden ist. Durchmesser von ca. 5-10 Pixel gewährleisten ausreichende Messgenauigkeit (Luhmann, 2003). Im Falle einer manuellen Auswertung (analytischer Plotter oder auch DPA) sollte der Durchmesser mindestens 100-150% des Messmarkendurchmessers betragen.



Die maximal einsetzbare Punktgröße hängt neben praktischen Randbedingungen (z.B. zulässige Markengröße beim Anbringen an das Objekt) auch von der zulässigen **Exzentrizität** zwischen der wahren Position des abgebildeten Kreismittelpunktes und des Mittelpunktes der im Bild dargestellten elliptischen Zielmarke ab.



Abbildungsexzentrizität einer kreisförmigen Zielmarke



Ellipsenexzentrizität (Dold, 1997)



9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

9.2.3 Markendurchmesser und Exzentrizität des Mittelpunktes



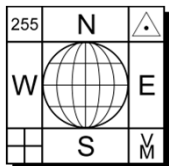
Üblicherweise wird der Mittelpunkt der Zielmarke durch das Zentrum der Bildellipse bestimmt (vgl. Kapitel 10). Dabei kommt es streng genommen zu einer Exzentrizität e zwischen gemessenem (berechnetem) Ellipsenzentrum und der eigentlich zu bestimmenden Abbildung des Zielmarkenmittelpunktes.

Die Auswirkung der Exzentrizität hängt ab von Zielmarkengröße, Aufnahme­richtung, Abstand von der Aufnahme­achse und Abbildungsmaßstab.

$$e = r_m - \frac{(r_1 + r_2)}{2} - \frac{c}{2} \left(\frac{R_m + \frac{d}{2} \sin(90 - \alpha)}{Z_m - \frac{d}{2} \cos(90 - \alpha)} + \frac{R_m - \frac{d}{2} \sin(90 - \alpha)}{Z_m + \frac{d}{2} \cos(90 - \alpha)} \right)$$

- e ... Abbildungsexzentrizität
- d ... Durchmesser der Zielmarke im Objektraum
- r_1 ... Bildradius des Kantenpunktes P_1
- r_2 ... Bildradius des Kantenpunktes P_2
- r_m ... Bildradius der abgebildeten Zielmarke
- α ... Aufnahme­richtung = Winkel zwischen Bildebene und Zielmarke
- R_m ... Abstand der Zielmarke von der Aufnahme­achse
- Z_m ... Aufnahme­entfernung zur Zielmarke
- c ... Kamerakonstante

Grundsätzlich führen genügend kleine Zielmarken in ausreichend großem Abstand zu vernachlässigbar kleinen Exzentrizitäten ($< 0.5 \mu\text{m}$). Berücksichtigung nur bei Spezialaufgaben höchster Genauigkeitsanforderung notwendig.



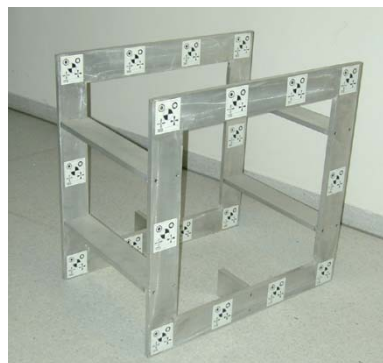
9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

9.3 Linienhafte Zielmarken

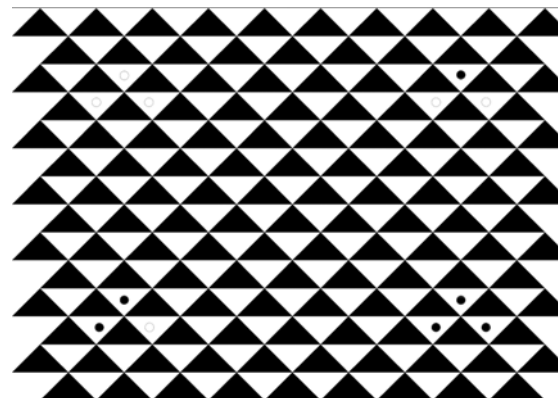
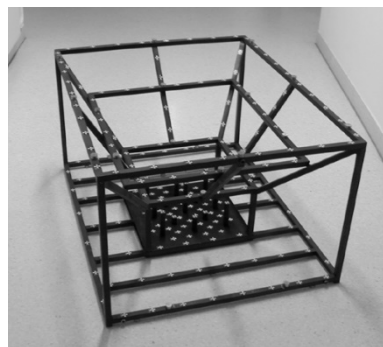
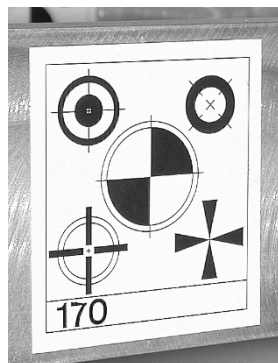
Bezugspunkt ist durch den Schnitt zweier (oder mehrerer) Linien definiert.

Vorteil: direkte Definition des Zentrums über markierte Linien

Nachteil: aufwendige Bestimmung des Zentrums durch Verfahren der digitalen Punktmessung



transportable Testfelder



calibration grid (PhotoModeler 4.0)



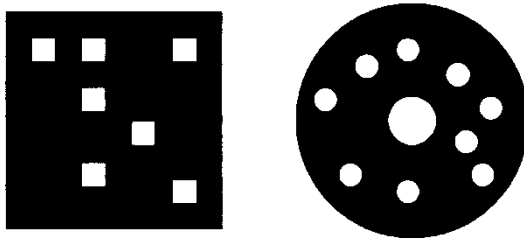
9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

9.4 Marken mit codierter Punktnummer

Zur Automatisierung der Punktnummernvergabe können künstliche Marken verwendet werden, die ein Muster mit codierter Punktnummer tragen.



← Barcode-Muster: Anzahl der codierbaren Zeichen
 $n = 2^{\text{Anzahl der Bits des Barcodes}}$



← Koordinaten-Muster

Auswahl codierter Punktmarken

Alternative: Automatische Schrifterkennung von alphanumerischen Punktcodierungen → zu rechenaufwendig und geringe Zuverlässigkeit.



Zielmarke mit alphanumerischer Punktcodierung

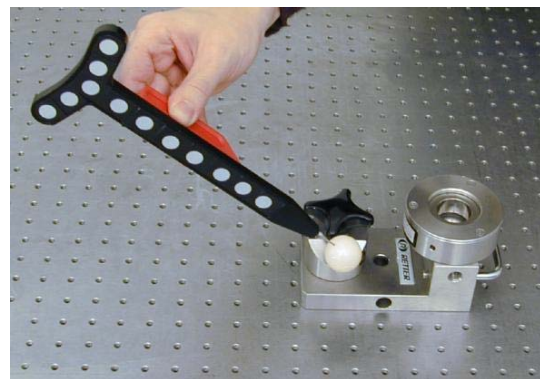


9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

9.5 Exzentrische Signalisierungsmittel



NIMBUS Messsystem



exzentrische Antastvorrichtung
(Photo M. Wiggenhagen, 2006)



Adapter für Bohrungen, Kanten und Ecken
(AICON, <http://www.aicon.de/>)



Messtaster
(V-STARS, <http://www.gdv-systems.de/>)



9. Punktsignalisierung in der Nahbereichsphotogrammetrie

Anmerkungen





10. Messung punktförmiger und kreuzförmiger Merkmale

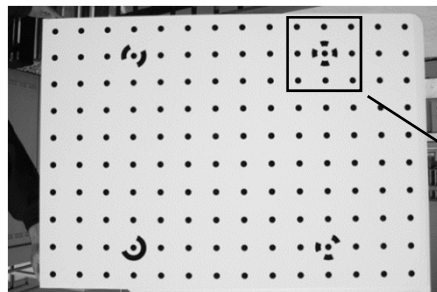
10.1 Messung punktförmiger Merkmale 10.1.1 Segmentierung

Quelle: Th. Luhmann, 2003: Nahbereichsphotogrammetrie.

Für die zu besprechenden digitalen Verfahren werden gute Näherungswerte für die gesuchten Bildpositionen benötigt. Diese Näherungswerte können auf verschiedene Weise geschafft werden:

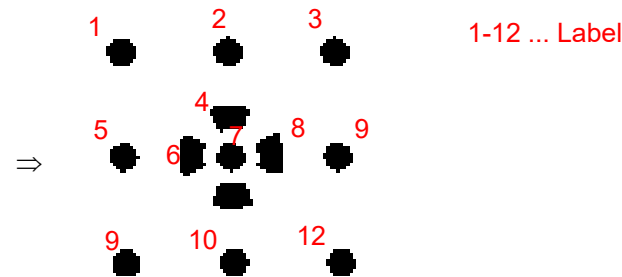
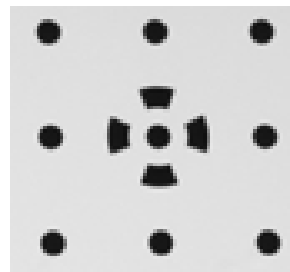
- durch vorgegebene (berechnete) Bildkoordinaten
- durch manuelles, grobes Einstellen mit einem Cursor am Bildschirm
- durch Mustererkennungsmethoden (Segmentierung)
- durch Interest-Operatoren, die Bildbereiche mit auffälligen Grauwertstrukturen bestimmen

10.1 Messung punktförmiger Merkmale



Testfeld (PhotoModeler 5.0)

Liegen keine Informationen über die Lage der Punkte in der Aufnahme (vgl. Abb.) vor, muss das Bild nach möglichen Kandidaten von Zielpunkten abgesucht werden.



10.1.1 Segmentierung

- adaptive Binarisierung
- Detektion zusammenhängender Bildbereiche, die über dem Schwellwert liegen
- Analyse der detektierten Bereiche hinsichtlich Größe (Pixelanzahl) und Form
- Speicherung der Bildkoordinaten, an denen hinreichende Größen- und Formbedingungen erfüllt werden

Schwelwertoperatoren dienen i. Allg. zur Klassifizierung des Bildinhaltes nach Grauwertintervallen. Für den einfachsten Fall wird angenommen, dass die Bildelemente nur zwei Klassen angehören → **Binarisierung**. Insbesondere ist bei der Verwendung von retro-reflektierenden Zielmarken das Histogramm **bimodal** ausgeprägt. Ist der Kontrast zum Hintergrund geringer bzw. der Bildinhalt entsprechend komplex, so muss die Schwellwertbildung adaptiv für jeden einzelnen Bildbereich vorgenommen werden.



10. Messung punktförmiger und kreuzförmiger Merkmale

10.1.2 Schwerpunktverfahren



Wenn das zu bestimmende Bildmuster eine symmetrische Verteilung von Grauwerten aufweist, kann dessen lokaler **Schwerpunkt** zur Berechnung des Zentrums (*centroid*) verwendet werden.

$$x_M = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i T g_i)}{\sum_{i=1}^n (T g_i)} \quad y_M = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i T g_i)}{\sum_{i=1}^n (T g_i)} \quad \begin{array}{l} x_i = r_i \text{ (row index)} \\ y_i = c_i \text{ (column index)} \end{array}$$

n ... Anzahl der beteiligten Pixel
 g_i ... Grauwert an der Position (x_i, y_i)
 T ... Entscheidungsfunktion

$$T = \begin{cases} 0 & \text{für } g < t \\ 1 & \text{für } g \geq t \end{cases} \quad t \dots \text{ adaptiver Schwellwert (siehe vorher)}$$

Für die Bestimmung von Punktmustern, deren Struktur durch Grauwertkanten bestimmt wird (z.B. durch den Rand eines Kreises), kann eine vom Gradienten abhängige Gewichtsfunktion eingeführt werden.

$$x_M = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \text{grad}^2(g_{x,i})}{\sum_{i=1}^n \text{grad}^2(g_{x,i})} \quad y_M = x_M = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \text{grad}^2(g_{y,i})}{\sum_{i=1}^n \text{grad}^2(g_{y,i})}$$

Schwerpunktoperatoren sind einfach zu implementieren, jedoch sind die direkt von der Grauwertverteilung der Umgebung abhängig.
 Gute Ergebnisse für die Zentrumskoordinaten nur dann, wenn

- das Muster homogen und symmetrisch ist und
- im Umgebungsbereich keine Störpixel vorhanden sind.

Theoretische Genauigkeit: $\sigma_{x_M} = \frac{1}{\sum g_i} \sqrt{\sum (x - x_M)^2 \sigma_g}$ $\sigma_{y_M} = \frac{1}{\sum g_i} \sqrt{\sum (y - y_M)^2 \sigma_g}$ $\sigma_g \dots$ Grauertrauschen

Erzielbare Genauigkeiten bei optimaler Voraussetzungen (vgl. Beispiel):

$$\sigma_{\hat{x}_M} = \sigma_{\hat{y}_M} = 0.03 - 0.05 \text{ Pixel}$$

Die Standardabweichung des Schwerpunktes hängt linear von σ_g sowie vom Abstand eines Pixel zum Zentrum, d.h. von der Größe des Punktes ab.



10. Messung punktförmiger und kreuzförmiger Merkmale

10.1.3 Korrelationsverfahren 10.1.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung



10.1.3 Korrelationsverfahren

Bei diesem Verfahren wird mit Hilfe der **normierten Kreuzkorrelation** ein Ähnlichkeitsmaß zwischen Muster- und Suchmatrix ermittelt. Das Korrelationsmaximum legt die gesuchte Punktposition im Suchbild fest (vgl. Abschnitt 8.2.1). Die Kreuzkorrelation ist ein robustes, kontrastunabhängiges Verfahren mit hohem Rechenaufwand. Die Struktur des zu suchenden Musters ist praktisch beliebig. Allerdings können Maßstabsunterschiede, Rotationen oder andere Verzerrungen zwischen Mustermatrix und Suchmatrix (Suchmatrix) nicht ohne weiters modelliert werden und führen direkt zu einem geringeren Ähnlichkeitsmaß.

10.1.4 Kleinste-Quadrate-Anpassung

Das Verfahren der Bildzuordnung nach kleinsten Quadraten (*least squares matching, LSM*) basiert auf einer iterativen geometrischen und radiometrischen Transformation zwischen Musterbild und Suchbild mit dem Ziel, die Quadratsumme der Grauwertdifferenzen zwischen Musterbild und transformiertem Suchbild zu minimieren (vgl. Abschnitt 8.2.4).

In Analogie zum Korrelationsverfahren kann auch hier für die Mustermatrix ein synthetisches Muster gewählt werden.

Anmerkung: Bei der Kleinste-Quadrate-Anpassung eines ellipsenförmigen Musters an eine im Suchbild vorhandene Zielmarke ist der allgemeine geometrische Ansatz (Affintransformation) überparametrisiert, da die Drehung und Skalierung entweder durch einen Scherungswinkel β und unterschiedliche Skalierung in x- und y-Richtung oder ebenso durch eine Gesamtdrehung α und Maßstabsfaktor formulierbar ist. In diesem Fall sollte daher eine **5-Parameter-Transformation** ohne Scherung gewählt werden. Aus Gründen der numerischen Stabilität sind die radiometrischen Parameter erst in der letzten Iteration hinzuzunehmen.

Berechnete Standardabweichungen für die Genauigkeit der Punkteinpassung werden i. Allg. zu optimistisch geschätzt und sind daher wenig aussagekräftig.

Die nächsten drei Operatoren (Stern-Operator, Zhou-Operator, Ring-Operator) sind sog. strukturelle Messverfahren. Strukturelle Messverfahren ermitteln die in einem Objekt zugehörigen relevanten Kanten im Bild und rekonstruieren die geometrische Form des Objektes mit Hilfe einer mathematischen Formbeschreibung.



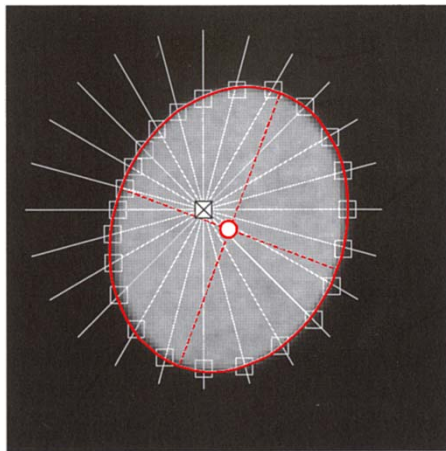
10. Messung punktförmiger und kreuzförmiger Merkmale

10.1.5 Stern-Operator 10.1.6 Zhou-Operator



Die Ermittlung des Ellipsenzentrums erfolgt i. Allg. (Stern-Operator, Zhou-Operator) in drei Schritten:

- 1) Festlegung des Suchfensters aus gegebener Näherungsposition
- 2) Bestimmung der Kantenpunkte (Ellipsenrand)
- 3) Bestimmung der Ellipsenparameter

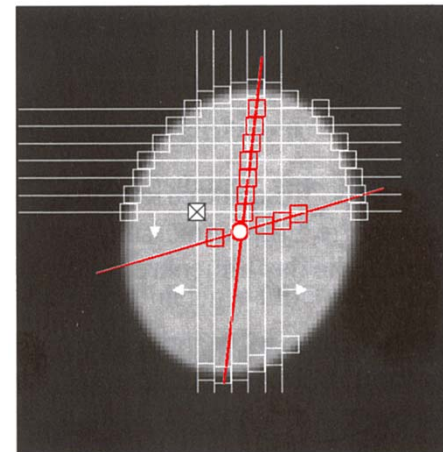


- ⊠ Näherungswert
- Kantenpunkt
- Ausgleichselement
- Mittelpunkt

Prinzip des Stern-Operators



Bei diesem Operator werden alle umliegenden Randpunkte entlang mehrerer, von einem Näherungswert innerhalb der Ellipse ausgehender Suchstrahlen bestimmt. Entlang der Suchstrahlen müssen die Grauwerte geeignet interpoliert werden. Die gefundenen Koordinaten der Kantenpunkte werden als Beobachtungen für eine Ellipsenausgleichung eingesetzt. Fehlerhafte Kantenpunkte können mittels Ausreißertest eliminiert werden.



- ⊠ Näherungswert
- Kantenpunkt
- Halbmesserpunkt
- Ausgleichselement
- Mittelpunkt

Prinzip des Zhou-Operators



Der Zhou-Operator basiert auf dem Modell der **konjugierten Ellipsendurchmesser**. Ellipsendurchmesser entstehen, wenn die Randpunkte paralleler Strahlen gemittelt und miteinander verbunden werden. Der Schnitt ergibt den Ellipsenmittelpunkt. Die Randpunkte werden entlang der Zeilen und Spalten des Bildes bestimmt und jeweils gemittelt. Über alle zusammengehörenden Sehnenmittelpunkte wird eine ausgleichende Gerade gerechnet, deren Schnittpunkt dem gesuchten Zentrum entspricht.

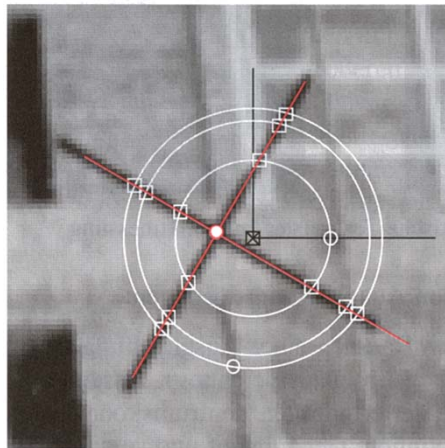


10. Messung punktförmiger und kreuzförmiger Merkmale

10.2 Messung kreuzförmiger Muster (Ring-Operator)

Die Messung von kreuzförmigen Mustern (z.B. Réseaukreuzen) kann nach einem ähnlichen Ansatz wie die kantenorientierte Ellipsenmessung erfolgen. Ziel ist auch hier die Extraktion derjenigen Grauwertkanten, die das Linienkreuz beschreiben.

Der Ring-Operator ist ein rotationsinvariantes Verfahren. Kantenpunkte werden innerhalb konzentrischer Kreise um ein Näherungszentrum ermittelt. Die innerhalb eines Kreises durch Radius und Bogenlänge gegebenen Polarkoordinaten der Kantenpunkte lassen sich in kartesische Koordinaten umrechnen. Durch eine ausgleichende Gerade werden die Punkte verbunden.

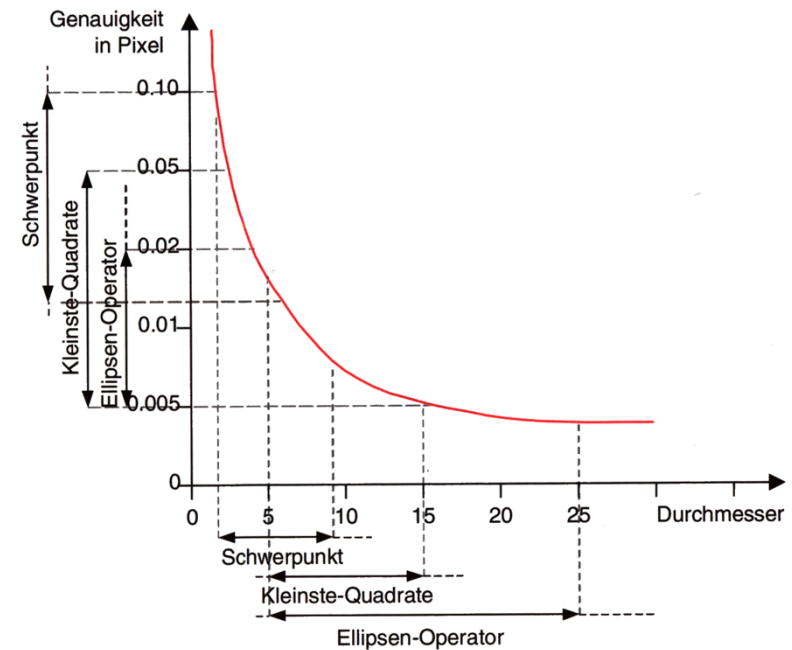


Prinzip des Ring-Operators

- ⊠ Näherungswert
- Kantenpunkt
- Fehlmessung
- Ausgleichselement
- Mittelpunkt

10.3 Genauigkeitsbetrachtungen

Die Größe (Durchmesser) der abgebildeten Punkte spielt eine entscheidende Rolle für die Punktgenauigkeit. Die optimale Punktgröße liegt zwischen 5 und 15 Pixel Durchmesser.



Einsatz und Genauigkeitspotential verschiedener Punktmessverfahren als Funktion der Punktgröße (nicht-skalierte Darstellung)



11. Kamerakalibrierung

11.1 Einleitung

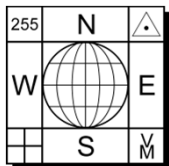
Die Kalibrierung von Aufnahmesystemen dient der Bestimmung des geometrischen Kameramodells, beschrieben durch die **Parameter der inneren Orientierung** (vgl. Abschnitte 1.1 bzw. 6.3):

- Kamerakonstante
- Lage des Bildhauptpunktes
- radial-symmetrische Verzeichnung
- tangentielle und asymmetrische Verzeichnung
- Maßstabsdifferenz (Affinität) und Scherung des Bildkoordinatensystems
- sonstige zusätzliche Parameter (*additional parameters*)

- ▣ Messkameras → Überprüfung der Stabilität der inneren Orientierung in regelmäßigen Zeitabständen
- ▣ Teilmesskameras, Digitalkameras → innere Orientierung ist einer zeitlichen Veränderung unterworfen
→ Kalibrierung der Aufnahmesysteme zum Zeitpunkt der Bildaufnahme unbedingt notwendig

Man unterscheidet im Wesentlichen drei Kalibrierungsverfahren, die sich durch das **Referenzmodell** sowie durch **Ort** und **Zeitpunkt** der Kalibrierung charakterisieren lassen (Th. Luhmann, 2003):

- ① Laborkalibrierung
- ② Testfeldkalibrierung
- ③ Simultankalibrierung



11. Kamerakalibrierung

11.2 Laborkalibrierung

Die Laborkalibrierung wird i. Allg. noch bei analogen Luftbildmesskameras durchgeführt. Die innere Orientierung wird mit Hilfe eines Goniometers oder eines Kollimators bestimmt, indem Richtungen oder Winkel der Bildstrahlen durch das Objektiv der Kamera hindurch gemessen werden. Vergleiche VO "Photogrammetrie". Für Aufnahmesysteme der Nahbereichsphotogrammetrie aber auch für einige digitale Luftbildkameras (z.B. UltraCamD von Vexcel Imaging Austria) hat die Laborkalibrierung nahezu keine praktische Bedeutung mehr.



© Zeiss

Goniometer
Zeiss, Oberkochen

Multi-collimator
USGS OSL, Reston



CVG Leica, Heerbrugg

© Leica



© USGS

© USGS

Laborkalibrierung mit Goniometer
(Quelle: Michael Cramer, Institut für Photogrammetrie, UNI Stuttgart)

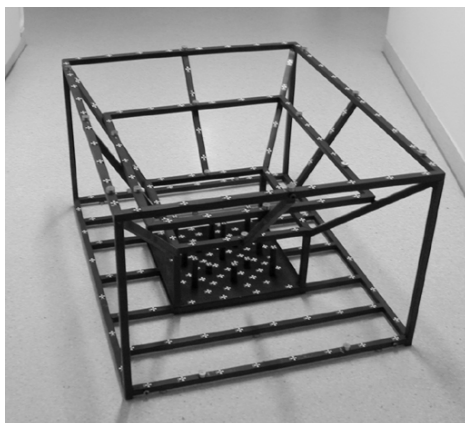


11. Kamerakalibrierung

11.3 Testfeldkalibrierung



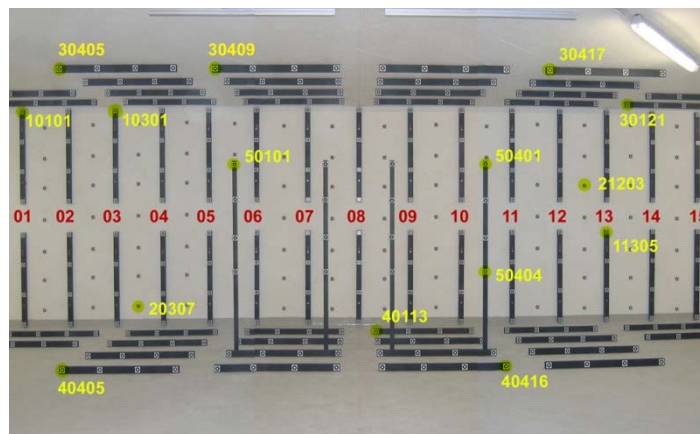
Bei der Testfeldkalibrierung wird ein geeignetes signalisiertes Objektpunktfeld mit bekannten Koordinaten oder Strecken von mehreren Standpunkten aus formatfüllend und mit ausreichender Strahlenschnittgeometrie aufgenommen. Testfelder können transportabel oder fest an einem Objekt angebracht sein.



transportable Testfelder
(TU Graz)



Testfeld (alt)
(Vexcel Imaging Austria)

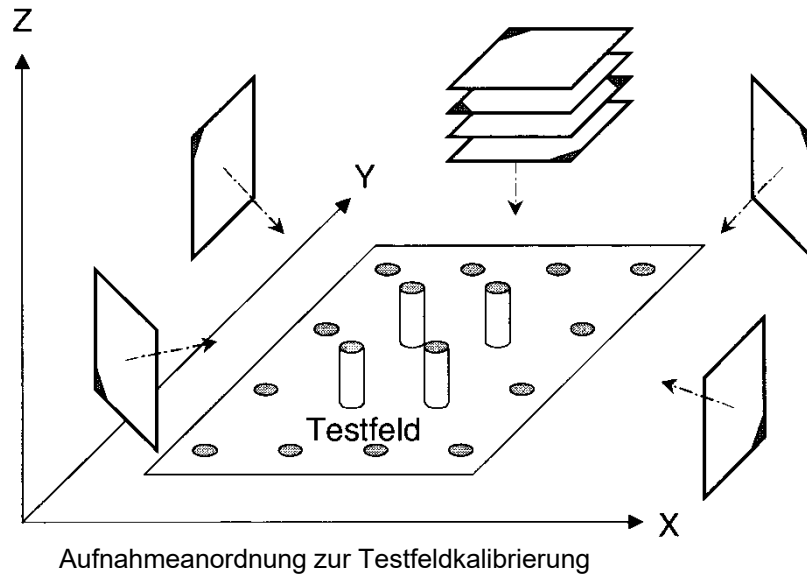


Testfeld (neu)
(Microsoft Photogrammetry)



11. Kamerakalibrierung

11.3 Testfeldkalibrierung



Aus den gemessenen Bildkoordinaten und den (näherungsweise) gegebenen Objektkoordinaten werden durch Bündeltriangulation sowohl die ausgeglichenen Testfeldkoordinaten, die Daten der äußeren Orientierung als auch die Parameter der inneren Orientierung gewonnen (vgl. Kapitel 6). Die Datumsfestlegung erfolgt bei der Testfeldkalibrierung im Rahmen einer freien Netzausgleichung.

Wälzung der Aufnahmen
um 90° um die Aufnahmeachse!

- Bestimmung der Kamerakonstante: - räumlich angeordnetes Testpunktfeld und/oder
- Schrägaufnahmen (eines ebenen Testpunktfeldes)
- Gute Bestimmbarkeit der Hauptpunktslage und der Affinität (Pixelausdehnung): - Kantung der Aufnahmen um 90°
- Das Testpunktfeld sollte in der Größe ungefähr jener des (später) aufzunehmenden Objektes entsprechen.

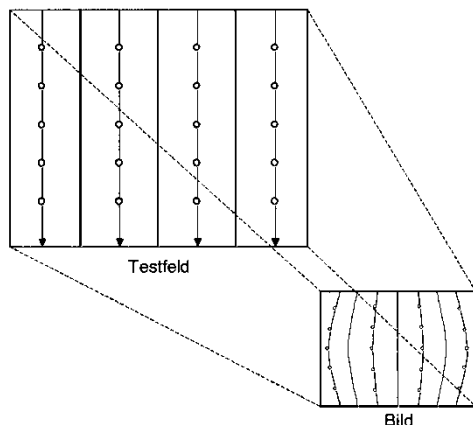


11. Kamerakalibrierung

11.3 Testfeldkalibrierung

Plumblinie-Kalibrierung:

Bei der sogenannten Plumblinie-Methode besteht das Testfeld aus mehreren Objektgeraden, die z.B. durch lotrecht (*plumb*) hängende Drähte gebildet werden. Mit diesem Verfahren können nur die Verzeichnungsparameter bestimmt werden.

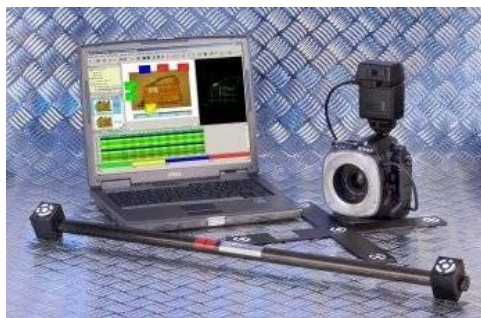


Plumb-line calibration (Brown, 1971)

Testfeldkalibrierung nach der Plumblinie-Methode
(Th. Luhmann, 2003)

On-the-job-Kalibrierung:

Mit dem Begriff *On-the-job-Kalibrierung* verbindet man die Kombination einer Testfeldkalibrierung (Aufnahme eines bekannten Punktfeldes) mit der eigentlichen Objektaufnahme. Dies kann zum Beispiel dann sinnvoll sein, wenn das Messobjekt selbst keine geeigneten Strukturen oder keine geometrisch bekannten Informationen aufweist, die eine Selbstkalibrierung zulassen.



3D-Industriemesssystem DPA-Pro von AICON



11. Kamerakalibrierung

11.4 Simultankalibrierung



Eine Erweiterung der Testfeldkalibrierung bzw. On-the-job-Kalibrierung ist die Simultankalibrierung mit Hilfe der Aufnahmen, die ohnehin für die normale Objektauswertung hergestellt werden. Das Testfeld wird durch das eigentliche Messobjekt ersetzt, das unter vergleichbaren Bedingungen aufgenommen werden muss (räumliche Tiefe, gekantete Aufnahmen, ausreichende Schnittgeometrie). Der wesentliche Vorteil der Simultankalibrierung liegt darin, dass die innere Orientierung exakt für den Zeitpunkt der Objektaufnahme bestimmt wird und somit höchste Genauigkeit bei der Objektauswertung erlaubt.

Für die Simultankalibrierung ist es nicht erforderlich, dass die Koordinaten des Punktfeldes in Form von Passpunkten bekannt sind.

Für die Maßstabsinformation reicht es aus, eine bekannte Strecke im Objektraum zu erfassen.

Wird die Simultankalibrierung nur mit **photogrammetrischen Beobachtungen** ausgeführt, spricht man auch von **Selbstkalibrierung**.

Unter dem Begriff **Systemkalibrierung** versteht man allgemein die Bestimmung sämtlicher geometrischer Parameter eines ganzen Messsystems, das z.B. aus zwei oder mehreren Kameras bestehen kann.



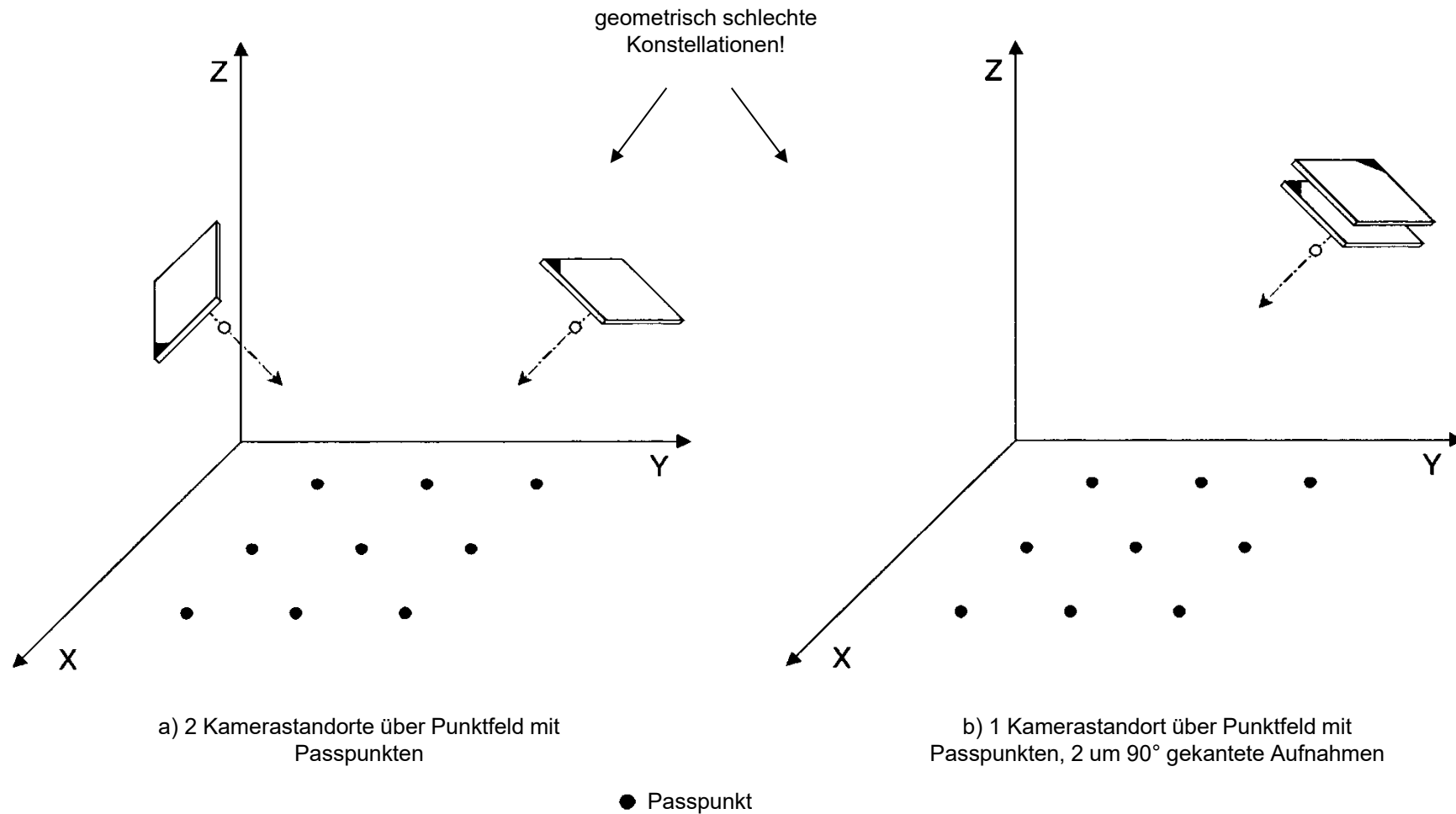
11. Kamerakalibrierung

11.5 Kalibrierung mit ebenem Passpunktfeld

Quellen:

W. Wester-Ebbinghaus, 1983: Ein photogrammetrisches System für Sonderanwendungen. BuL, 3/1983, 118-128.

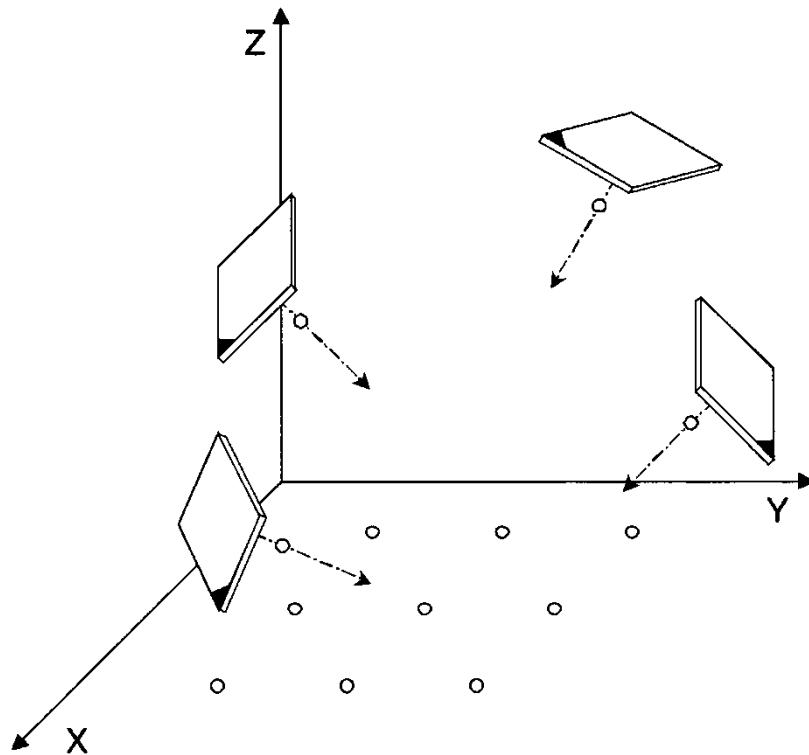
W. Wester-Ebbinghaus, 1985: Verfahren zur Feldkalibrierung von photogrammetrischen Aufnahmekammern im Nahbereich. DGK, Reihe B, Heft 275, 106-114.



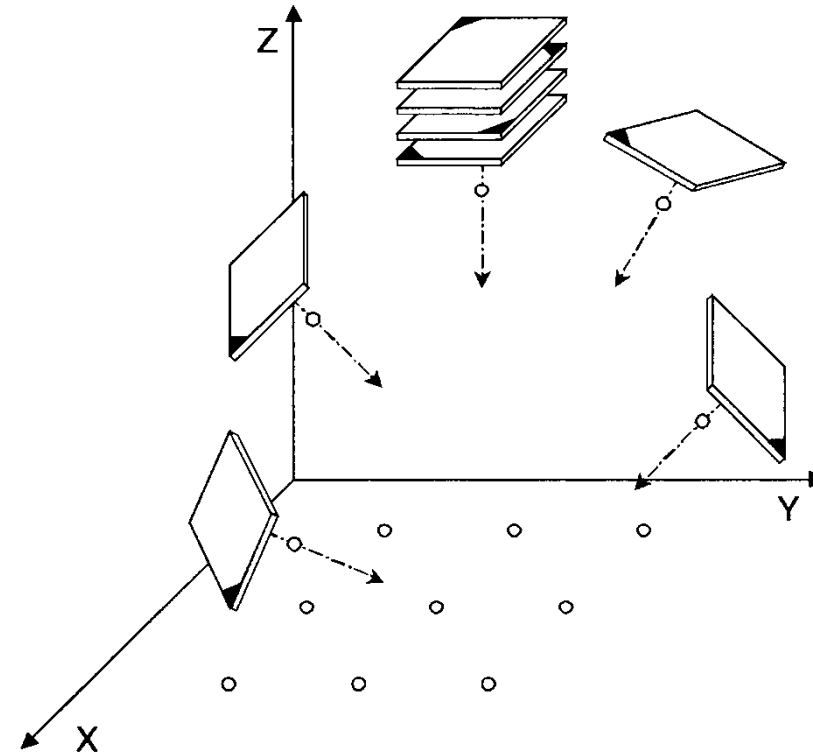


11. Kamerakalibrierung

11.5 Kalibrierung mit ebenem Passpunktfeld



c) 4 Kamerastandorte über Punktfeld ohne Passpunkte



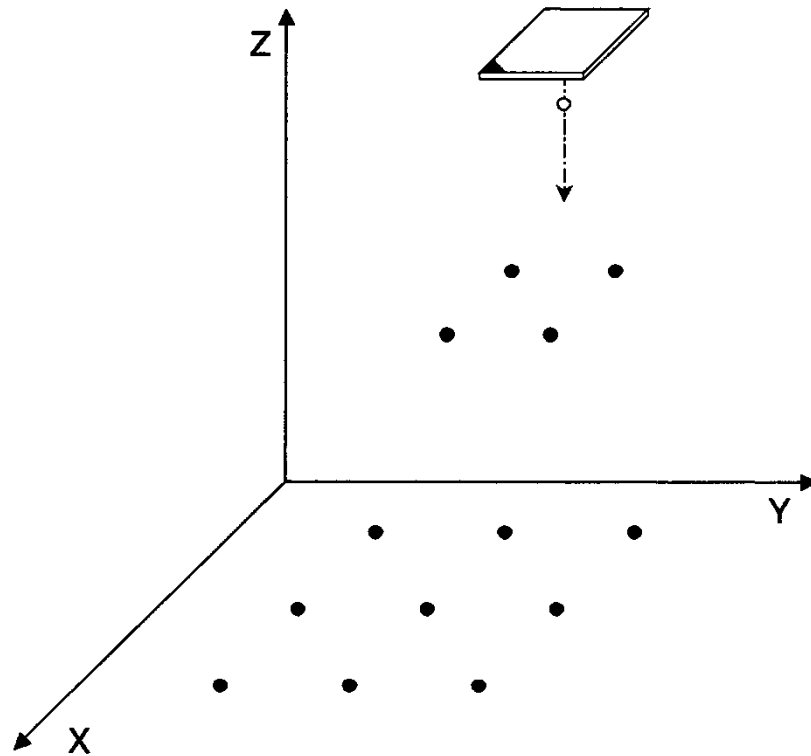
d) 8 Kamerastandorte über Punktfeld ohne Passpunkte

○ Zielpunkt

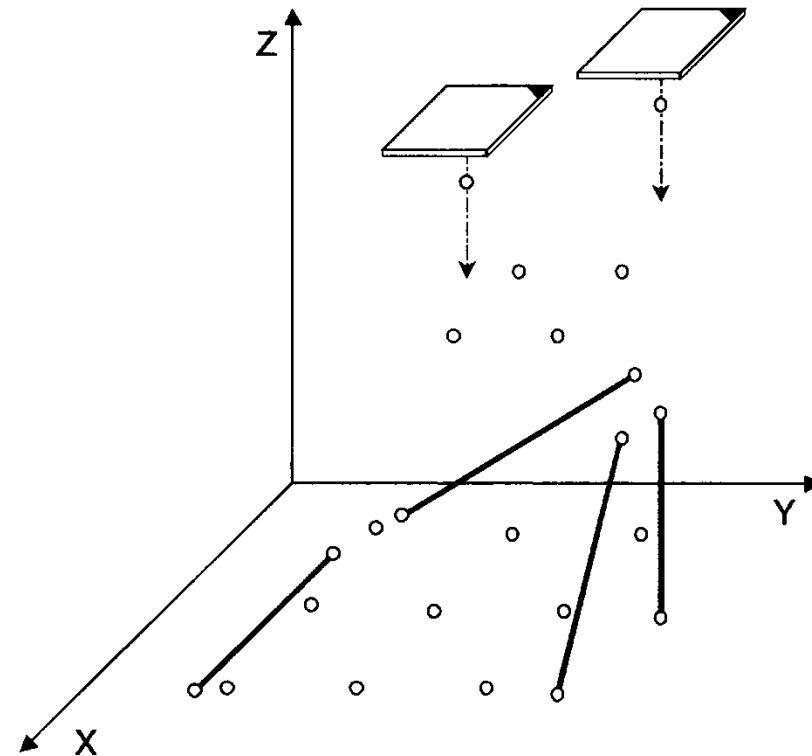


11. Kamerakalibrierung

11.6 Kalibrierung mit räumlichem Passpunktfeld

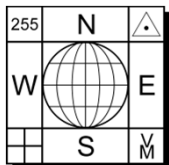


a) 1 Aufnahme über räumlichem Punktfeld mit Passpunkten



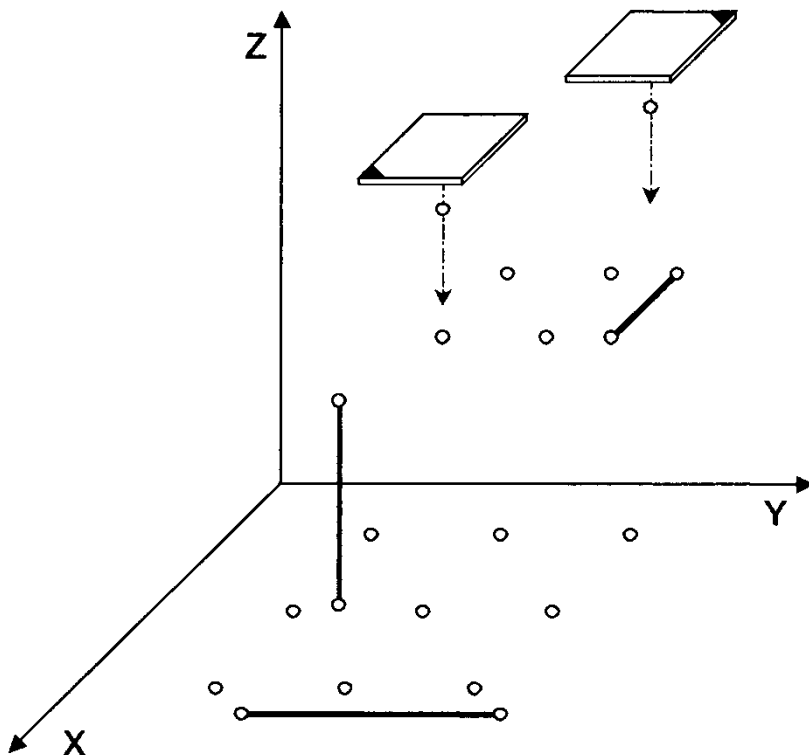
b) 2 nicht-gewälzte Aufnahmen über Punktfeld mit 4 Maßstäben ohne Passpunkte

● Passpunkt ○ Zielpunkt ○—○ bekannte Strecke

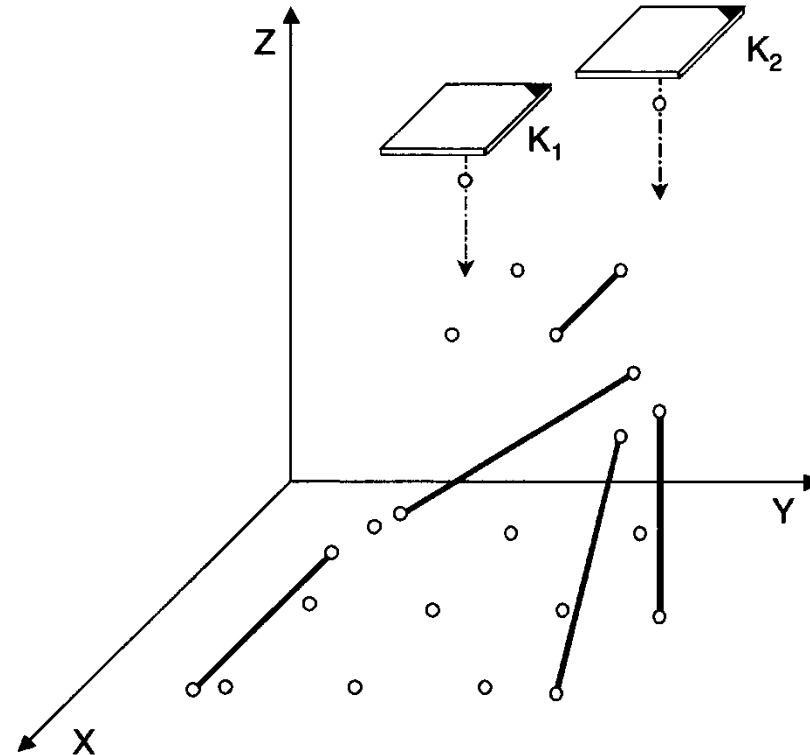


11. Kamerakalibrierung

11.6 Kalibrierung mit räumlichem Passpunktfeld



c) 2 gewälzte Aufnahmen über Punktfeld mit 3 Maßstäben ohne Passpunkte



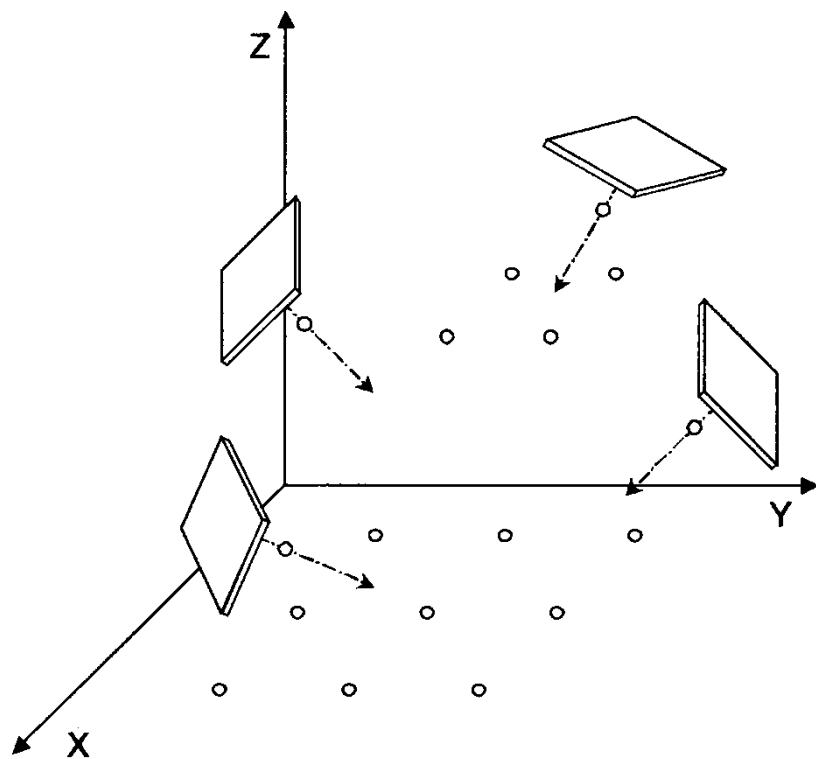
d) 2 unterschiedliche Kameras K_1, K_2 über Punktfeld mit 5 Maßstäben ohne Paßpunkte

● Passpunkt ○ Zielpunkt ○—○ bekannte Strecke

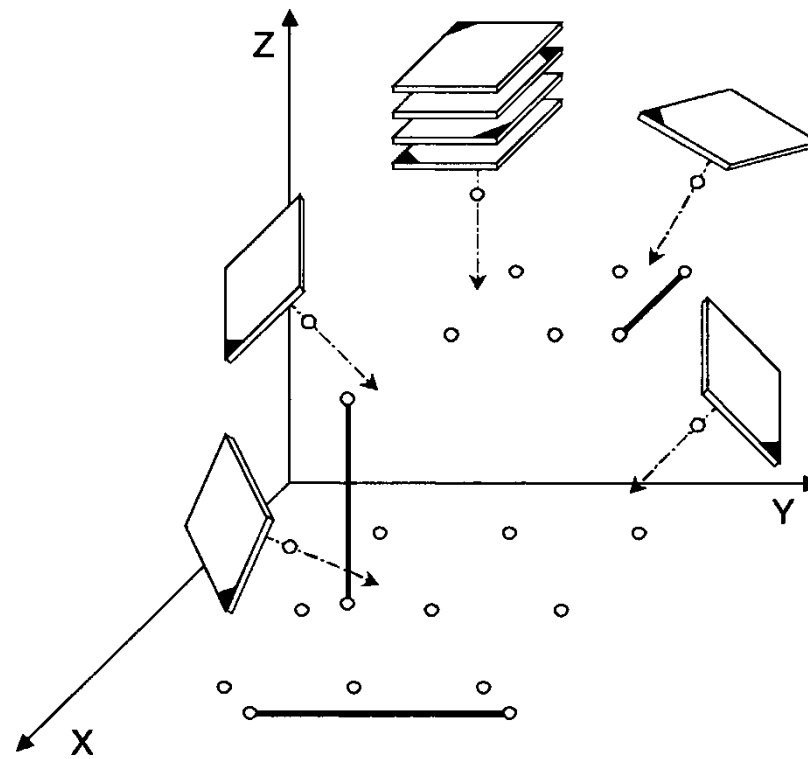


11. Kamerakalibrierung

11.6 Kalibrierung mit räumlichem Passpunktfeld



e) 4 Kamerastandorte über räumlichem Punktfeld ohne Passpunkte, beliebige Kantungen



f) 8 Kamerastandorte über räumlichem Punktfeld mit 3 Maßstäben ohne Passpunkte

● Passpunkt ○ Zielpunkt ○—○ bekannte Strecke



11. Kamerakalibrierung

11.6 Kalibrierung mit räumlichem Passpunktfeld

■ Kalibrierung mit erweiterter Einzelbildorientierung

Im Allgemeinen erfolgt die Kalibrierung mit einem Kameramodell, das auf Kamerakonstante, Hauptpunkt und radial-symmetrische Verzeichnung eingeschränkt ist.

→ räumliches Passpunktfeld notwendig (Beispiel a)

Drei Ansätze zur gleichzeitigen Bestimmung der äußeren und inneren Orientierung:

- Räumlicher Rückwärtsschnitt mit erweitertem funktionalen Modell:

Das funktionale Modell basiert auf den Kollinearitätsgleichungen, die um Terme zur Korrektur von Verzeichnungseffekten erweitert werden.

6 U → äußere Orientierung ($X_0, Y_0, Z_0, \varphi, \omega, \kappa$)

5 U → innere Orientierung (x_0, y_0, c, K_1, K_2)

Details siehe Abschnitt 2.2.

- Lineare projektive Geometrie:

Mit dem Verfahren DLT oder der direkten Bestimmung einer Projektionsmatrix P werden zunächst 11 Transformationsparameter in einem linearen Gleichungssystem bestimmt. Der Ansatz kann durch Parameter der radial-symmetrischen Verzeichnung erweitert werden.

Es werden hier wie bei der ersten Methode mindestens sechs räumliche Passpunkte benötigt. Vergleiche Abschnitt 2.4.

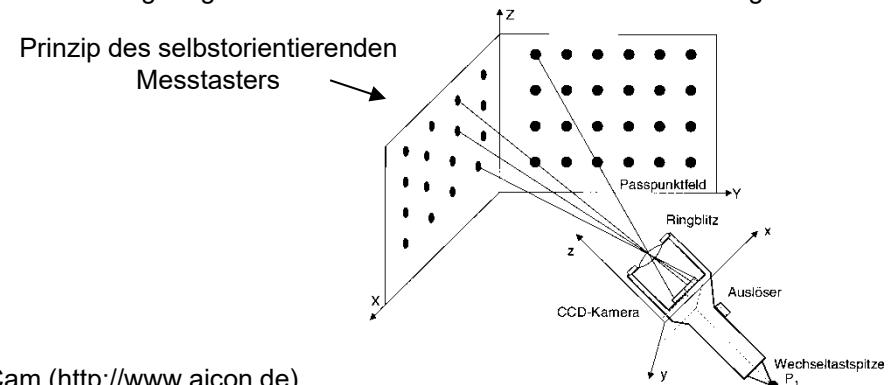
- Kamerakalibrierung nach Tsai (1986):

Iterative Bestimmung der inneren (5 Parameter) und äußeren Orientierung (6 Parameter) eines Einzelbildes. Das Verfahren benötigt 7 räumliche Passpunkte.

Die erzielbare Genauigkeit der Kamerakalibrierung mit einem Einzelbild ist deutlich geringer als beim Verfahren der Simultankalibrierung in Mehrbildverbänden. Anwendungsbereich → Robotik



Messtaster ProCam (<http://www.aicon.de>)





11. Kamerakalibrierung

11.7 Radial-symmetrische Verzeichnung

Reihenentwicklung (Seidel-Reihe) mit Verzeichnungsparametern K_1 bis K_n :

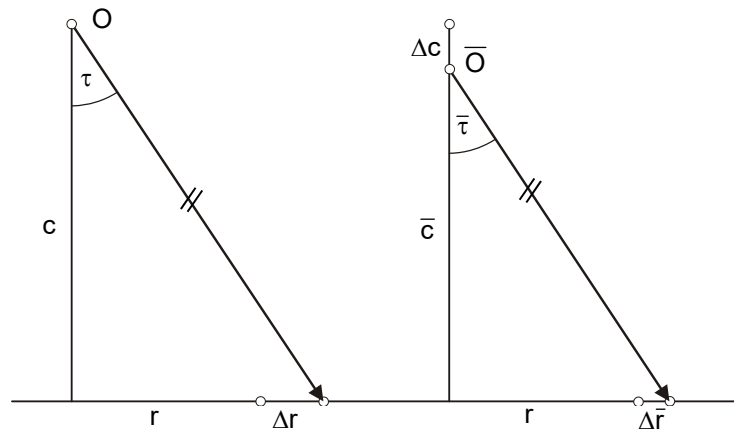
$$\Delta r_{\text{rad}} = K_1 r^3 + K_2 r^5 + \dots \quad (\text{Gau\ss'sche Verzeichnung})$$

Reihenentwicklung mit linearem Anteil (\rightarrow **balanced radial distortion**):

$$\Delta \bar{r}_{\text{rad}} = \bar{K}_0 r + \bar{K}_1 r^3 + \bar{K}_2 r^5 + \dots$$

Durch Vorgabe eines zweiten Nulldurchganges der Verzeichnungskurve kann \bar{K}_0 fixiert werden.

Da der lineare Anteil eine Ma\sstabs\~{a}nderung des Bildes bewirkt, ist eine davon abh\~{a}ngige \~{A}nderung der Kamerakonstante notwendig.



Konformit\~{a}t des Strahlenb\~{u}ndels muss gewahrt bleiben $\Rightarrow \bar{\tau} = \tau$

In der Praxis wird r_0 so gew\~{a}hlt, dass die minimalen und maximalen Verzeichnungswerte des genutzten Bildformates etwa gleich gro\ss sind. In der Regel liegt r_0 etwa bei 2/3 des maximalen Bildformates.

$$\frac{r + K_1 r^3 + K_2 r^5}{c} = \frac{r + \bar{K}_0 r + \bar{K}_1 r^3 + \bar{K}_2 r^5}{\bar{c}}$$

$$\bar{K}_0 = -(\bar{K}_1 r^2 + \bar{K}_2 r^4) \quad \dots \text{ Nulldurchgang bei } r=r_0$$

$$\frac{r_0 + K_1 r_0^3 + K_2 r_0^5}{c} = \frac{r_0}{\bar{c}} \Rightarrow s = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{1}{1 + K_1 r_0^2 + K_2 r_0^4} \quad \dots \text{ Ma\sstabsfaktor}$$

$$\bar{K}_1 = s \cdot K_1$$

$$\bar{K}_2 = s \cdot K_2$$

$$\bar{K}_0 = -(\bar{K}_1 r^2 + \bar{K}_2 r^4)$$

$$\bar{c} = s \cdot c$$

Umkehrung:

$$\frac{r}{c} = \frac{r + \bar{K}_0 r}{\bar{c}} \Rightarrow s = \frac{\bar{c}}{c} = 1 + \bar{K}_0$$

$$K_1 = \frac{1}{s} \cdot \bar{K}_1$$

$$K_2 = \frac{1}{s} \cdot \bar{K}_2$$

$$c = \frac{1}{s} \cdot \bar{c}$$



11. Kamerakalibrierung

11.7 Radial-symmetrische Verzeichnung

Verzerrungsfunktion nach ISP-Konvention:

$$\Delta \bar{r}_{\text{rad}} = A_1 r (r^2 - r_0^2) + A_2 r (r^4 - r_0^4) + \dots$$

$$\Rightarrow \bar{c} = \bar{c}$$

$$\bar{K}_0 = -(A_1 r_0^2 + A_2 r_0^4)$$

$$\bar{K}_1 = A_1$$

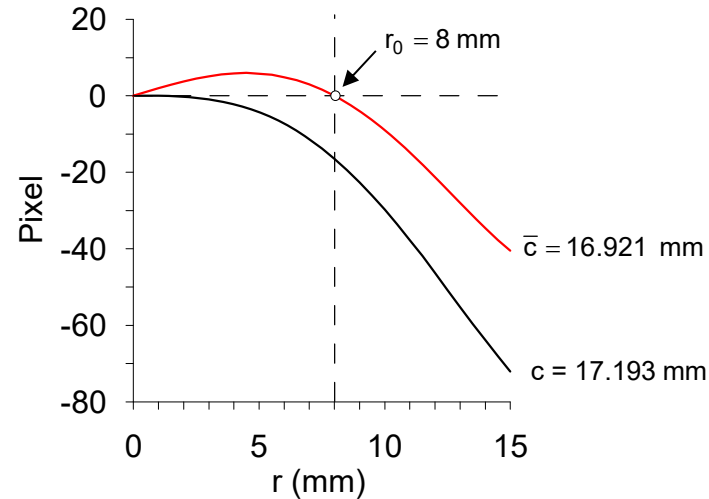
$$\bar{K}_2 = A_2$$

$$\Rightarrow s = 1 - (A_1 r_0^2 + A_2 r_0^4)$$

$$K_1 = \frac{1}{s} \cdot \bar{K}_1 = \frac{1}{s} \cdot A_1$$

$$K_2 = \frac{1}{s} \cdot \bar{K}_2 = \frac{1}{s} \cdot A_2$$

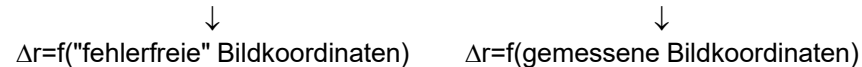
$$c = \frac{1}{s} \cdot \bar{c} = \frac{1}{s} \cdot \bar{c}$$



Radial-symmetrische Verzerrung
Nikon D100 mit Objektiv AT-X 17 mm

Achtung: • Vorzeichendefinition

• Definition der Verzerrung (photogrammetrischer Ansatz vs. Ansatz der CV)



• Iterative Berechnung der Verzerrungskorrektur (photogrammetrischer Ansatz vs. Ansatz der CV)



• Änderung der Kamerakonstante c um Δc bewirkt eine projektive Änderung der Verzerrungsfunktion (vgl. vorherige Seite):

$$\Delta \bar{r}_{\text{rad}} = \frac{\Delta c}{c} r + (1 + \frac{\Delta c}{c}) \Delta r_{\text{rad}} \Rightarrow \bar{K}_0 = \frac{\Delta c}{c}, \bar{K}_1 = (1 + \frac{\Delta c}{c}) K_1, \bar{K}_2 = (1 + \frac{\Delta c}{c}) K_2 \quad \Delta r_{\text{rad}} = K_1 r^3 + K_2 r^5 + \dots$$

Für höchste Genauigkeitsansprüche ($< 1 \mu\text{m}$ am Bildrand) ist eine entfernungabhängige Verzerrungskorrektur einzuführen.

Literaturquellen (Arbeitsunterlagen zur Vorlesung)

Die nachfolgende Liste weist jene Literaturquellen aus, welche der Vortragende zur Vorbereitung der Lehrveranstaltung "Bildmessung" herangezogen hat. Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Lehrbücher und Monographien (Photogrammetrie):

- HEIPKE, CH. (2017): Photogrammetrie und Fernerkundung. – Handbuch der Geodäsie, herausgegeben von WILLI FREEDEN und REINER RUMMEL, 1. Auflage, 839 S. [GEOD 528.7 HEIP – I 525485/P]
- FÖRSTNER, W., WROBEL, B.W. (eds.) (2016): Photogrammetric Computer Vision – Statistics, Geometry, Orientation and Reconstruction. – Geometry and Computing, 11, Springer International Publishing, 816 S. [GEOD 528.7B FOER – I 502173/11]
- MCGLONE, J.CH. (2013): Manual of Photogrammetry. – Sixth Edition, American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, 1318 p. [GEOD 528.7 MCGL – PH 224]
- LUHMANN, TH. (2010): Nahbereichsphotogrammetrie: Grundlagen, Methoden und Anwendungen. – 3., völlig neu bearb. u. erw. Auflage, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 668 S. [GEOD 528.7B LUHM – PH 216.1]
- LUHMANN, TH. (2018): Nahbereichsphotogrammetrie: Grundlagen, Methoden und Anwendungen. – 4., neu bearb. u. erw. Auflage, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 783 S. [GEOD 528.7B LUHM – I 526474]
- KRAUS, K. (2007): Photogrammetry - Geometry from Images and Laser Scans. – 2nd edition, Walter de Gruyter, 459 S. [GEOD 528.7 KRAU – PH 207]
- LUHMANN, T., ROBSON, S., KYLE, S., HARLEY, I. (2006): Close Range Photogrammetry – Principles, techniques and applications. – 2nd edition, Whittles Publishing, 510 S. [GEOD 528.7 LUHM – PH 204]
- LUHMANN, T., ROBSON, S., KYLE, S., BOEHM, J. (2014): Close-Range Photogrammetry and 3D Imaging. – 2nd edition, De Gruyter Textbook, 684 S. [GEOD 528.7 LUHM]
- HAALA, N. (2005): Multi-Sensor-Photogrammetrie. – Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Dissertationen, Nr. 589, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 101 S.
- KRAUS, K. (2004): Photogrammetrie, Band 1, Geometrische Informationen aus Photographien und Laserscanneraufnahmen. – 7. Auflage, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 516 S. [GEOD 528.7 KRAU – PH 192.1]
- MCGLONE, J.CH. et al. (2004): Manual of Photogrammetry. – Fifth Edition, American Society of Photogrammetry and Remote Sensing, 1151 p. [GEOD 528.7 MCGL – PH 196]
- LUHMANN, TH. (2003): Nahbereichsphotogrammetrie: Grundlagen, Methoden und Anwendungen. – 2., überarbeitete Auflage, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 586 S. [GEOD 528.7B – PH 197]
- MIKHAIL, E.M., BETHEL, J.S., MCGLONE, J.CH. (2001): Introduction to Modern Photogrammetry. – John Wiley & Sons, Inc., New York, 477 S. [GEOD 528.7 MIKH – PH 184]
- GRUEN, A., HUANG, T.S. (eds.) (2001): Calibration and Orientation of Cameras in Computer Vision. – Springer Series in Information Sciences, Springer Verlag, 235 S. [GEOD 621.3R GRUE – DP 21]
- KRAUS, K. (2000): Photogrammetrie, Band 3, Topographische Informationssysteme. – 1. Auflage, Dümmler Verlag bzw. Verlag H. Stam, Köln, 419 S. [TU Graz I 161.124 3 – PH 158.3]
- SCHENK, T. (1999): Digital Photogrammetry, Volume 1, Background, Fundamentals, Automatic Orientation Procedures. – TerraScience Verlag, Laurelville, Ohio, U.S.A., 428 S. [TU Graz I 182.329 – PH 9]
- HEIPKE CH. (1995): Digitale photogrammetrische Arbeitsstationen. – Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Dissertationen, Nr. 450, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 111 S.
- KRAUS, K. (1997): Photogrammetry, Volume 2, Advanced Methods and Applications. – 4. Auflage, Dümmler Verlag, Bonn, 466 S. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- DOLD, J. (1997): Ein hybrides photogrammetrisches Industriemeßsystem höchster Genauigkeit und seine Überprüfung. – Schriftenreihe, Studiengang Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr München, Heft 54, 137 S. [TU Graz I 161.124 2(4) – PH 158.2]
- KRAUS, K. (1996): Photogrammetrie, Band 2, Verfeinerte Methoden und Anwendungen. – 3. Auflage, Dümmler Verlag, Bonn, 488 S. [TU Graz I 161.124 2(3) – PH 158.1]
- KRAUS, K. (1994): Photogrammetrie, Band 1, Grundlagen und Standardverfahren. – 5. Auflage, Dümmler Verlag, Bonn, 394 S. [TU Graz I 165.036 – PH 158]
- KRAUS, K. (1993): Photogrammetry, Volume 1, Fundamentals and Standard Processes. – 4. Auflage, Dümmler Verlag, Bonn, 397 S. [TU Graz I 162.223 – PH 94]
- EBNER, H., FRITSCH, D., HEIPKE, CH. (eds.) (1991): Digital Photogrammetric Systems. – Wichmann Verlag, Karlsruhe, 344 S. [TU Graz I 153.046. – DP 4]

- HEIPKE CH. (1990): Integration von Bildzuordnung, Punktbestimmung, Oberflächenrekonstruktion und Orthoprojektion innerhalb der digitalen Photogrammetrie. – Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Dissertationen, Nr. 366, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 89 S. [TU Graz I II 205.328]
- ALBERTZ, J., KREILING, W. (1989): Photogrammetrisches Taschenbuch (Photogrammetric Guide, Guide Photogrammétrique, Manual Fotogramétrico). – 4. Auflage, Wichmann Verlag, Karlsruhe, 292 S. [TU Graz I 148.322/b. – PH 87]
- KONECNY, G., LEHMANN, G. (1984): Photogrammetrie. – Verlag Walter de Gruyter, Berlin, 399 S. [TU Graz I 140.271 – PH 79]
- SLAMA, CH.C., THEURER, CH., HENRIKSEN, S.W. (eds.) (1980): Manual of Photogrammetry. – 4th edition, American Society of Photogrammetry, Falls Church, VA 22046, 1056 p. [Privatbibliothek von V. Kaufmann bzw. PH 20]
- JORDAN/EGGERT/KNEISSL (1972): Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage, Band IIIa/1 bis 3: Photogrammetrie, - Autoren: RINNER, K., & BURKHARDT, R., J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 2321 S. [TU Graz I 53.058 – PH 80, PH 56.1, PH 56.2]

Schriften der Photogrammetrische Woche:

- FRITSCH, D., SPILLER, R. (eds.) (1999): Photogrammetric Week '99. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 380 S. [TU Graz I 181.378. – PH 180]
- FRITSCH, D., SPILLER, R. (eds.) (2001): Photogrammetric Week '01. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 341 S. [GEOD 528.7 FRIT – PH 186]
- FRITSCH, D. (ed.) (2003): Photogrammetric Week '03. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 292 S. [GEOD 528K FRIT – PH 190]
- FRITSCH, D. (ed.) (2005): Photogrammetric Week '05. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 343 S. [GEOD 528K FRIT – PH 203]
- FRITSCH, D. (ed.) (2007): Photogrammetric Week '07. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 350 S. [GEOD 528K FRIT – KB 106]
- FRITSCH, D. (ed.) (2009): Photogrammetric Week '09. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 354 S. [GEOD 528K FRIT – PH 213]
- FRITSCH, D. (ed.) (2011): Photogrammetric Week '11. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 330 S. [GEOD 528K FRIT] – PH 222]
- FRITSCH, D. (ed.) (2013): Photogrammetric Week '13. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 352 S. [GEOD 528K FRIT] – PH 225]
- FRITSCH, D. (ed.) (2015): Photogrammetric Week '15. – Wichmann Verlag, Heidelberg, 394 S. [GEOD 528K FRIT]
- 56th Photogrammetric Week, September 11-15, 2017, Presentations and Abstracts, <http://www.ifp.uni-stuttgart.de/phowo/2017/presentations.en.html>
- 57th Photogrammetric Week, September 9-13, 2019, Presentations and Abstracts <https://phowo.ifp.uni-stuttgart.de/publications/Default.aspx>
- 58th Photogrammetric Week, September 13-16, 2022, Presentations <https://phowo.ifp.uni-stuttgart.de/>

Lehrbücher und Monographien (Computer Vision):

- GOSHTASBY, A.A. (2012): Image Registration – Principles, Tools and Methods. – Advances in Computer Vision and Pattern Recognition, Springer Verlag, London, 441 S. [GEOD 681.3G GOSH – BV 128]
- SZELISKI, R. (2011): Computer Vision – Algorithms and Applications. – Springer Verlag, London, 812 S. [GEOD 528.7B SZEL – DP 20]
- CYGANEK, B., SIEBERT J.P. (2009): An introduction to 3D computer vision techniques and algorithms. – Wiley-Verlag, 483 S. [GEOD 528.7B CYGA – DP 18]
- STEGE, C., ULRICH, M., WIEDEMANN, CH. (2009): Machine Vision Algorithms and Applications. – Wiley-VCH Verlag, Weinheim 360 S. [GEOD 528.7B STEG – DP 19]
- PARAGIOS, N., CHEN, Y., FAUGERAS, O. (eds.) (2006): Handbook of Mathematical Models in Computer Vision. – Springer-Verlag, 605 S. [GEOD 528.7B PARA – DP 14]
- JÄHNE, B. (2005): Digital Image Processing. – Springer-Verlag, 607 S.

- DAVIES, E.R. (2005): Machine Vision – Theory, Algorithms, Practicalities. – Elsevier, Morgan Kaufmann Publishers, 934 S. [*GEOD 528.7B DAVI – DP 11*]
- SCHREER, O. (2005): Stereoanalyse und Bildsynthese. – Springer-Verlag, 278 S. [*GEOD 528.7D SCHR – DP 16*]
- MA, Y., SOATTO, ST., KOČECKÁ, J., SASTRY, S.S. (2004): An Invitation to 3-D Vision – From Images to Geometric Models. – Prentice Hall Series in Artificial Intelligence, 693 S. [*GEOD 528.7B FORS – PH 195*]
- FORSYTH, D.A., PONCE, J. (2003): Computer Vision – A Modern Approach. – Springer-Verlag, 605 S. [*GEOD 528.7B PARA – DP 14*]
- HARTLEY, R., ZISSERMAN, A. (2003): Multiple View Geometry in Computer Vision. – 2nd Edition, Cambridge University Press, 655 S. [*GEOD 528.7B HART – PH 194*]
- SONKA, M., HLAVAC, V., BOYLE, R. (1999): Image Processing, Analysis, and Machine Vision. – 2nd Edition, PWS Publishing, 770 S. [*TU Graz I 180.550 – BV 111*]
- POLLEFEYS, M. (1999): Self-calibration and metric 3D reconstruction from uncalibrated image sequences. – Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, 227 S. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- FAUGERAS, O. (1996): Three-dimensional Computer Vision: A geometric Viewpoint. – The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 663 S. [*TU Graz I 179.237 – CG 19*]
- JAIN, R., KASTURI, R., SCHUNCK, B. (1995): Machine Vision. – McGraw-Hill Series in Computer Science, 549 S. [*TU Graz I 171.835 – BV 112*]
- PINZ, A. (1994): Bildverstehen. – Springer-Verlag, 235 S. [*TU Graz I 163.800 – BV 78*]

Skripten:

- BRANDSTÄTTER, G. (2001): Photogrammetrie und Fernerkundung (Grundvorlesung). – Institut für Angewandte Geodäsie, Technische Universität Graz, 67 S., 138 Abb. [*GEOD 528 BRAM*]
- BRANDSTÄTTER, G. (2001): Digitale Bildverarbeitung (Grundvorlesung). – Institut für Angewandte Geodäsie, Technische Universität Graz, 46 S., 69 Abb. [*GEOD 528 BRAM*]
- BRANDSTÄTTER, G. (2001): Ingenieur-Bildverarbeitung (Wahlvorlesung). – Institut für Angewandte Geodäsie, Technische Universität Graz, 38 S., 32 Abb. [*GEOD 528 BRAM*]
- BRANDSTÄTTER, G. (2001): Digitalphotogrammetrie. – Institut für Angewandte Geodäsie, Technische Universität Graz, 46 S., 44 Abb. [*GEOD 528 BRAM*]
- BRANDSTÄTTER, G. (2001): Angewandte Bildverarbeitung. – Institut für Angewandte Geodäsie, Technische Universität Graz, 53 S., 13 Abb. [*GEOD 528 BRAM*]
- BRANDSTÄTTER, G. (2001): Grundzüge einer algebro-projektiven Photogrammetrie. – Institut für Angewandte Geodäsie, Technische Universität Graz, 46 S., 44 Abb. [*GEOD 528 BRAM*]
- KAUFMANN, V. (1991): Photogrammetrie und Fernerkundung 1. – Unterstützender Lehrbehelf (Umdrucke), Institut für Angewandte Geodäsie und Photogrammetrie, Technische Universität Graz, 149 S.
- KAUFMANN, V. (1991): Photogrammetrie und Fernerkundung 2. – Unterstützender Lehrbehelf (Umdrucke), Institut für Angewandte Geodäsie und Photogrammetrie, Technische Universität Graz, 87 S.
- LEBERL, F. (1982): Photogrammetrie 1. – Institut für Angewandte Geodäsie und Photogrammetrie, Technische Universität Graz, 235 S.
- RINNER, K., LEBERL, F. (1978): Photogrammetrie 2. – Institut für Angewandte Geodäsie und Photogrammetrie, Technische Universität Graz, 240 S.

Schriftliche Unterlagen zu Fortbildungskursen:

- CRAMER, M., MANDLBURGER, G. (2019): Tutorial Phowo 2019 „State-of-the-art in UAV-based Mapping, Modern LiDAR Sensor Technologies, Deep Learning“. – Photogrammetrische Woche, Stuttgart. [USB-Stick, Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- SÖRGEL, U., HAALA, N. (2017): Tutorial Phowo 2017 „Remote Sensing – From Basics to Advanced Methods“. – Photogrammetrische Woche, Stuttgart. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- FRITSCH, D., ROTHERMEL, HAALA, N., CRAMER, M., ROTHERMEL, M., WENZEL, K., BECKER, S., TUTZAUER, P., COUGHENOUR, C., BALSÀ, J. (2015): Tutorial Phowo 2015 „Excellence in Photogrammetry – From UAV Data Collection and Data Processing to Advanced 3D Modelling“. – Photogrammetrische Woche, Stuttgart. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]

- FRITSCH, D., ROTHERMEL, M., WENZEL, K., WALTER, V., BECKER, S., CRAMER, M., HAALA, N. (2013): Tutorial Phowo 2013 „All About 3D Modelling“. – Photogrammetrische Woche, Stuttgart. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- FRITSCH, D., HAALA, N., WALTER, V., et al. (2011): Tutorial Phowo 2011 „All About Point Clouds – Generation, Processing and Management“. – Photogrammetrische Woche, Stuttgart. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- FRITSCH, D., CRAMER, M., BÖHM, J., WALTER, V., HAALA, N., KADA, M., (2009): Tutorium „Photogrammetry 2.0“. – Photogrammetrische Woche, Stuttgart. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- FRITSCH, D., CRAMER, M., HAALA, N., KADA, M., WALTER, V. (2007): Tutorium „Towards a 3D Digital Globe – Technologies, Projects and Niches“. – Photogrammetrische Woche, Stuttgart. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- TUYTELAARS, T., MIKOLAJCZYK, K. (2006): A Survey on Local Invariant Features. – Tutorial, ECCV 2006, Graz. [Privatbibliothek von V. Kaufmann]
- FRITSCH, D., HAALA, N., BÖHM, J., CRAMER, M. (2005): Tutorial Phowo 2005 – The Best of Photogrammetric Image Data Processing. – 50. Photogrammetrische Woche, Stuttgart.
- POLLEFEYS, M. (2004): Automatic 3D Modeling with a Hand-Held Camera Images. – Tutorial, 112 S.
- FRITSCH, D., HAALA, N., KADA, M., WALTER, V. (2003): Tutorium „Photogrammetrie und 3D-Visualisierung – Mehrwert und Visionen“. – 49. Photogrammetrische Woche, Stuttgart.
- HEUEL, ST., FÖRSTNER, W. (2002): Projective Geometry, Multiview Geometry and Uncertainty. – Tutorial, Photogrammetric Computer Vision 2002, Graz.
- FRITSCH, D., CRAMER, M., HAALA, N., WALTER, V. (2001): Tutorium „Digitale Luftbildaufzeichnung – Realität, Erwartungen und Visionen“. – 48. Photogrammetrische Woche, Stuttgart.
- FRITSCH, D., BRENNER, C., HAALA, N., WALTER, V. (1999): Tutorium „Algorithmen und ihre Automatisierung in der photogrammetrischen Datenauswertung“. – 47. Photogrammetrische Woche, Stuttgart.
- KRAUS, K., et al. (1999): Geo-Basisdaten-Erfassung. – Universitätslehrgang, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, 28.9.-30.9.1999.
- KRAUS, K., et al. (1998): Digitale Nahbereichsphotogrammetrie: Methoden und Anwendungen. – Universitätslehrgang, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, 29.9.-1.10.1998.
- FRITSCH, D., CRAMER, M., ENGLISH, M., HAALA, N., ACKERMANN, F. (1997): Tutorium „GPS/INS in der Photogrammetrie“. – 46. Photogrammetrische Woche, Stuttgart. [TU Graz II 208.052 – PH 174]

Andere Quellen:

- KRUCK, E. (2003): BINGO 5.0 – Bündelausgleichung für Ingenieurobjekte. – Benutzerhandbuch, 138 S.
- INTERGRAPH (2006): ImageStation – Digital Mensuration (ISDM) User's Guide. – Benutzerhandbuch, 488 S.
- INTERGRAPH (2006): ImageStation – Automatic Triangulation (ISAT) User's Guide. – Benutzerhandbuch, 24 S.
- LEICA GEOSYSTEMS (2003): Leica Photogrammetric Suite, OrthoBASE & OrthoBASE Pro, User's Guide. – Benutzerhandbuch, 490 S.
- LUHMANN, TH. et al. (2003-2022): Photogrammetrie, Laserscanning, Optische 3D-Messtechnik. Beiträge der Oldenburger 3D-Tage.

Ausgewählte Aufsätze:

- LOURAKIS, M.I.A., ARGYROS, A.A. (2009): A software package for generic sparse bundle adjustment. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 36, No. 1, Article 2 (March 2009), 30 p.
DOI = <http://doi.acm.org/10.1145/1486525.1486527>.
- POLLEFEYS, M., NISTER, D., et al. (2008): Detailed Real-Time Urban 3D Reconstruction from Video. – International Journal of Computer Vision, Vol. 78, Springer Netherlands, 143-167.
- LOWE, D.G. (2004): Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints. – International Journal of Computer Vision, 60, 2 (2004), 91-110.
- NISTÉR, D. (2004): An Efficient Solution to the Five-Point Relative Pose Problem. – IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 26, 6 (2004), 756-770.
- WIGGENHAGEN, M. (2002): Calibration of digital consumer cameras for photogrammetric applications. – ISPRS Commission III, Vol. 34, Part 3B, Photogrammetric Computer Vision, Graz, 301-304.
- TRIGGS, B., MCLAUCHLAN, P., HARTLEY, R., FITZGIBBON, A. (2000): Bundle Adjustment – A Modern Synthesis. – Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1883, Springer-Verlag, 298-372.

HARTLEY , R.I. (1997): In Defense of the Eight-Point Algorithm. – IEEE Transactions on Pattern Analysis And Machine Intelligence, 19, 6 (1997), 580-593.
etc.

Literaturquellen, welche mit einer Signatur gekennzeichnet sind, können in der Fachbibliothek NAWI (Abteilung Geodäsie) der TU Graz in der Stremayrgasse 16 EG ausgeliehen werden.

Bildmessung, VO
Graz, im WS 2022/23